Einführung in die symbolische Logik

mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen

Von

Rudolf Carnap

Professor der Philosophie
University of California, Los Angeles

Mit 5 Textabbildungen



Springer-Verlag Wien GmbH

1954

ISBN 978-3-7091-3535-8 ISBN 978-3-7091-3534-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-7091-3534-1

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag in Vienna 1954
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1954

Für Ina
in tiefer Dankbarkeit

Vorwort

In der Gestalt der symbolischen oder mathematischen Logik oder Logistik hat die Logik seit etwa 100 Jahren eine völlig neue Form angenommen. Die Verwendung von Symbolen ist zwar das auffallendste Merkmal der neuen Logik, aber nicht das wesentlichste. Wichtiger sind die Exaktheit der Formulierung, die große Ausdehnung des Gebietes, insbesondere in der Theorie der Relationen und der Begriffe höherer Stufen, und die vielfältige Anwendungsmöglichkeit der neuen Methoden. In den letzten Jahrzehnten ist daher das Interesse an der symbolischen Logik in weiteren Kreisen wachgeworden, besonders unter Philosophen und Mathematikern, aber auch unter den Fachwissenschaftlern, die an der Analyse der Begriffe ihrer Fachwissenschaften interessiert sind. Insbesondere in den Vereinigten Staaten ist die symbolische Logik heute ein anerkanntes Fachgebiet in Forschung und Unterricht; hier betrachten die meisten Autoren, die über Philosophie der Erkenntnis, Sprachanalyse, Methodenlehre der Wissenschaft, Grundlagen der Mathematik, axiomatische Methode und ähnliches schreiben, die symbolische Logik als ein unentbehrliches Hilfsmittel. Dieses Buch möchte dazu beitragen, das Interesse an der symbolischen Logik in den deutschsprachigen Ländern zu fördern. Es unterscheidet sich von den übrigen Lehrbüchern, die meist in englischer Sprache erschienen sind, hauptsächlich in folgenden Punkten. Hier werden nicht nur, wie sonst üblich, die elementaren Teile der Theorie dargestellt, sondern auch ausführlich die höheren Gebiete, besonders die Logik der Relationen, die für die Anwendung besonders wichtig sind. Ferner ist der ganze Teil II der Anwendung der symbolischen Logik gewidmet. Dort wird zunächst die Konstruktion verschiedener Sprachformen, die für Anwendungen in Betracht kommen, erläutert, und dann werden Axiomensysteme aus verschiedenen Gebieten in symbolischer Form dargestellt. Schließlich werden hier, entsprechend dem heutigen Gesichtspunkt, die Theorien der formalen Sprachsysteme — die logische Syntax — und der interpretierten Sprachsysteme — die Semantik — wenigstens skizziert. Wenn diese Theorien selbst auch notwendigerweise über den Rahmen eines einführenden Buches hinausgehen, so scheint es mir doch wichtig, daß jeder, der sich die neuen symbolischen Methoden aneignet, sie vom Anfang an unter dem Gesichtspunkt des Aufbaues von deduktiven Systemen zu betrachten lernt. Dadurch gewinnt er wie von selbst die Einsicht, daß die Symbolik eine unter genauen Regeln stehende Sprache ist, durch deren Verwendung die Formen seines eigenen Denkens

verschärft werden können. Diese Berücksichtigung der logischen Syntax und der Semantik ist es auch, was dieses Buch — abgesehen von seinem erheblich größeren Umfang — hauptsächlich von meinem früheren Buch unterscheidet („Abriß der Logistik", Wien 1929, 114 Seiten), das inzwischen vergriffen ist und in vielem durch die schnelle Entwicklung des Gebietes überholt ist.

Wenn ein Jahreskurs für das Gebiet der symbolischen Logik geplant wird, so könnte dieses Buch so verwendet werden, daß Teil I A als Grundlage für den Einführungskurs des ersten Semesters genommen wird, ergänzt durch einige in Sprachform A formulierte Anwendungsbeispiele aus Teil II (siehe die Erläuterungen in **42** e). Der Kurs des zweiten Semesters würde dann hauptsächlich den Inhalt von Teil I C behandeln, wiederum ergänzt durch Anwendungen aus Teil II. Dazu könnten dann nach dem Belieben des Lehrers in kleinerem oder größerem Ausmaß Erörterungen über syntaktische und semantische Theorie hinzugefügt werden, sei es auf Grund der kurzen Angaben in Teil I B oder auf Grund ausführlicherer Darstellungen in anderen Büchern. Das gesamte Gebiet der modernen Logik einschließlich der Theorie der formalen und der gedeuteten Sprachsysteme ist jedoch so umfassend, daß es weit besser wäre, wenn zwei Jahreskurse dafür geplant werden könnten.

Princeton, N. J., im Januar 1954.
Institute for Advanced Study.

Rudolf Carnap

Inhaltsverzeichnis

Erster Teil

System der symbolischen Logik

Seite

A. Die einfache Sprache A 1

1. Die Aufgabe der symbolischen Logik 1
a) Der Zweck der symbolischen Sprache 1. — b) Die Entwicklung der symbolischen Logik 2.

2. Individualkonstanten und Prädikate 4
a) Individualkonstanten und Prädikate 4. — b) Satzkonstanten 6. — c) Prädikate für Beispiele 6.

3. Satzverknüpfungen 7
a) Deskriptive und logische Zeichen 7. — b) Verknüpfungszeichen 7. — c) Fortlassen von Klammern 9.

4. Die Wahrheitstafeln 10
a) Wahrheitstafeln 10. — b) Wahrheitsbedingung und Sinn 13.

5. L-Begriffe 14
a) Tautologische Sätze 14. — b) Spielraum und L-Wahrheit 14.

6. L-Implikation und L-Äquivalenz 18
a) L-Implikation und L-Äquivalenz 18. — b) Gehalt 20. — c) Klassen von Sätzen 21. — d) Beispiele 22.

7. Satzvariable 22
a) Variable und Satzformeln 22. — b) Satzvariable 23.

8. Tautologische Satzformeln 25
a) Tautologische Implikationsformeln 25. — b) Ersetzbarkeit 27. — c) Tautologische Äquivalenzformeln 28. — d) Ableitungen 31.

9. All- und Existenzsätze 32
a) Individualvariable und Operatoren 32. — b) Mehrere Operatoren 34. — c) Allgemeine Implikationen 34. — d) Übersetzungen aus der Wortsprache 35.

10. Prädikatvariable 36
a) Prädikatvariable 36. — b) Intensionen und Extensionen 38.

11. Bewertungen 41

12. Einsetzungen 43
a) Einsetzungen für Satzvariable 43. — b) Einsetzungen für Individualvariable 43. — c) Einsetzungen für Prädikatvariable 44. — d) Lehrsätze über Einsetzungen 45.

13. Lehrsätze über Operatoren 47

14. L-wahre Formeln mit Operatoren 51
a) L-wahre Implikationsformeln 51. — b) L-wahre Äquivalenzformeln 54. — c) Übungen 57.

Seite

15. Definitionen ... 57
a) Ersetzbarkeit 57. — b) Definitionen 58. — c) Beispiele 59.
16. Prädikate höherer Stufen ... 60
a) Prädikate und Prädikatvariable verschiedener Stufen 60. — b) Stufenerhöhung 61. — c) Beispiele 62.
17. Identität; Kardinalzahlen ... 62
a) Identität 62. — b) Beispiele 63. — c) Kardinalzahlen 64.
18. Funktoren ... 65
a) Funktoren; Bereiche einer Relation 65. — b) Bedingungen für die Einführung von Funktoren 66.
19. Isomorphie ... 67

B. Das Sprachsystem B ... 69
20. Semantische und syntaktische Systeme ... 70
21. Formregeln des Kalküls B ... 72
a) Die Sprache B 72. — b) Das System der Typen 73. — c) Russells Antinomie 74. — d) Satzformeln und Sätze in B 76. — e) Definitionen in B 77.
22. Umformungsregeln des Kalküls B ... 77
a) Grundsatzschemata 77. — b) Erläuterungen zu einigen Grundsätzen 79. — c) Schlußregeln 80.
23. Beweise und Ableitungen im Kalkül B ... 81
a) Beweise 81. — b) Ableitungen 82.
24. Lehrsätze über Beweisbarkeit und Ableitbarkeit ... 83
a) Allgemeine Lehrsätze über den Kalkül B 83. — b) Ersetzbarkeit 84.
25. Das semantische System B ... 85
a) Bewertungen und Auswertungen 85. — b) Bezeichnungsregeln 88. — c) Wahrheit 89.
26. Beziehungen zwischen syntaktischen und semantischen Systemen 90

C. Die erweiterte Sprache C ... 92
27. Die Sprache C ... 92
28. Prädikatverknüpfungen ... 93
a) Prädikatverknüpfungen 93. — b) Universalität 94. — c) Klassenterminologie 96. — d) Übungen 97.
29. Identität; Extensionalität ... 97
a) Identität 97. — b) Über die Typen logischer Konstanten 98. — c) Extensionalität 100.
30. Relationsprodukt; Relationspotenzen ... 101
a) Relationsprodukt 101. — b) Relationspotenzen 102. — c) Ergänzung 103.
31. Verschiedene Arten von Relationen ... 104
a) Darstellungen von Relationen 104. — b) Asymmetrie, Transitivität, Reflexivität 105. — c) Lehrsätze über Relationen 106. — d) Eineindeutigkeit 108.
32. Weitere logische Prädikate, Funktoren und Verknüpfungen ... 109
a) Leere Klasse und Allklasse 109. — b) Vereinigungsklasse und Durchschnittsklasse 110. — c) Verknüpfungen von Relationen

Seite

und Klassen 110. — d) Lehrsätze 111. — e) Aufzählungsklassen 111.

33. Der λ-Operator 112
a) λ-Operator 112. — b) Regel für den λ-Operator 114. — c) Definitionen durch λ-Ausdrücke 116. — d) Die R von b 117.

34. Äquivalenzklassen, Strukturen, Kardinalzahlen 118
a) Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen 118. — b) Strukturen 119. — c) Kardinalzahlen 121. — d) Strukturelle Eigenschaften 122.

35. Kennzeichnungen von Individuen 123
a) Kennzeichnungen 123. — b) Relationale Kennzeichnungen 125.

36. Erblichkeit und Relationsketten 126
a) Erblichkeit 126. — b) Relationsketten 126. — c) R-Familien 128.

37. Endliches und Unendliches 128
a) Progressionen 128. — b) Summe und Vorgängerrelation 129. — c) Induktive Kardinalzahlen 130. — d) Reflexive Klassen 130. — e) Unendlichkeitsannahme 131.

38. Stetigkeit 133
a) Wohlgeordnete, dichte und rationale Reihen 133. — b) Dedekindsche und Cantorsche Stetigkeit 133.

Zweiter Teil

Anwendungen der symbolischen Logik

A. Formen und Methoden des Sprachaufbaues 135

39. Dingsprachen 135
a) Dinge und ihre Schichten 135. — b) Drei Formen der Dingsprache; Sprachform I 136. — c) Sprachform II 137. — d) Sprachform III 138.

40. Koordinatensprache 138
a) Koordinatensprache mit natürlichen Zahlen 138. — b) Rekursive Definitionen 141. — c) Koordinatensprache mit ganzen Zahlen 141. — d) Reelle Zahlen 143.

41. Quantitative Begriffe 144
a) Quantitative Begriffe in Dingsprachen 144. — b) Formulierung von Gesetzen 145. — c) Quantitative Begriffe in Koordinatensprachen 146.

42. Die axiomatische Methode 146
a) Axiome und Theoreme 146. — b) Formalisierung und Symbolisierung; Modelle 147. — c) Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit, Monomorphie 148. — d) Der Explizitbegriff 149. — e) Die ASe in Teil II 150.

B. Axiomensysteme (ASe) der Mengenlehre und Arithmetik 151

43. AS der Mengenlehre 151
a) Erste Fassung, ohne Funktoren als Grundzeichen 152. — b) Zweite Fassung, mit Funktoren als Grundzeichen 154.

44. Peanos AS der natürlichen Zahlen 156
a) Erste Fassung, die ursprüngliche Form 156. — b) Zweite Fassung, nur ein Grundzeichen 157.

45. AS der reellen Zahlen 158

Seite

C. ASe der Geometrie 160

46. AS der Topologie (Umgebungsaxiome) 160

a) Erste Fassung. Grundzeichen: Prädikat ‚*Um*' 160. — b) Zweite Fassung. Grundzeichen: Funktor ‚*um*' 162. — c) Definition logischer Begriffe 162.

47. AS der projektiven, affinen und metrischen Geometrie 164

a) AS der projektiven Geometrie 164. — b) Affine Geometrie 167. — c) AS der metrischen, euklidischen Geometrie 168.

D. ASe der Physik 169

48. ASe der Raum-Zeit-Topologie: 1. Das *K*-*Z*-System 169

a) Allgemeine Erläuterungen 169. — b) *K*, *Z* und Weltlinien 170. — c) Wirkungsrelation 173. — d) Die Struktur des Raumes 175.

49. ASe der Raum-Zeit-Topologie: 2. Das *Wlin*-System 178

50. ASe der Raum-Zeit-Topologie. 3. Das *W*-System 180

51. Determination und Kausalität 181

a) Der allgemeine Begriff der Determination 181. — b) Prinzip der Kausalität 182.

E. ASe der Biologie 183

52. AS der Dinge und ihrer Teile 183

a) Die Dinge und ihre Teile 183. — b) Die Schichten der Dinge 185. — c) Zeitrelation 187.

53. AS einiger biologischer Begriffe 187

a) Teilung und Verschmelzung 187. — b) Hierarchien, Zellen, Organismen 189.

54. AS der Verwandtschaftsbegriffe 191

a) Biologische Verwandtschaftsbegriffe 191. — b) Juristische Verwandtschaftsbegriffe 192.

Anhang 196

55. Übungsaufgaben zur Anwendung der symbolischen Logik 196

a) Mengenlehre und Arithmetik 196. — b) Geometrie 197. — c) Physik 199. — d) Biologie 200.

56. Literaturverzeichnis 201

57. Literaturhinweise 203

Namen- und Sachverzeichnis 205

Zeichen der symbolischen Sprache und der Metasprache 209

Erster Teil

System der symbolischen Logik

A. Die einfache Sprache A

1. Die Aufgabe der symbolischen Logik

1a. Der Zweck der symbolischen Sprache. Die symbolische Logik (auch mathematische Logik oder Logistik genannt) ist die moderne Form der Logik, die in den letzten hundert Jahren entwickelt worden ist. In diesem Buch wird ein System der symbolischen Logik dargestellt und werden Beispiele zu seiner Anwendung gegeben. Ein solches System ist nicht eine Theorie, d. h. ein System von Behauptungen über irgend welche Gegenstände, sondern eine Sprache, d. h. ein System von Zeichen und von Regeln zur Verwendung dieser Zeichen. Wir werden die symbolische Sprache so aufbauen, daß man Sätze irgend einer gegebenen Theorie über irgend welche Gegenstände in diese Sprache übersetzen kann, wenn man zuvor einigen Zeichen dieser Sprache eine bestimmte Deutung gibt, nämlich so, daß sie zur Bezeichnung der Grundbegriffe der betreffenden Theorie dienen. Solange wir uns im Bereich der reinen Logik befinden, d. h. solange wir mit der Aufstellung dieser Sprache beschäftigt sind und noch nicht mit ihrer Anwendung und Deutung für eine bestimmte Theorie, bleiben die betreffenden Zeichen unserer Sprache ungedeutet. Genau genommen stellen wir also nicht eine Sprache, sondern ein Schema oder Skelett einer Sprache auf, aus dem wir je nach Bedarf durch Deutung gewisser Zeichen eine eigentliche Sprache — im Sinn eines Instrumentes der Mitteilung — schaffen können. Im zweiten Teil des Buches werden verschiedene derartige Deutungen behandelt und Theorien verschiedener Wissenschaftsgebiete, meist in axiomatischer Form, symbolisch formuliert. Das ist die angewandte Logik. Der erste Teil des Buches stellt die reine Logik dar; hier beschreiben wir die Struktur der symbolischen Sprache, indem wir ihre Regeln angeben.

Wenn bestimmte wissenschaftliche Begriffe, Theorien, Behauptungen, Ableitungen u. dgl. logisch analysiert werden sollen, so besteht häufig der beste Weg darin, daß man diese Begriffe, Definitionen, Theorien usw. in die symbolische Sprache übersetzt. In dieser Sprache hat man, im Unterschied zu den gewöhnlichen Wortsprachen, eindeutige Zeichen und exakte Formulierungen; die Korrektheit und vor allem die Reinheit einer Ableitung können daher hier leichter und genauer geprüft werden

als in der Wortsprache. Unter der Reinheit einer Ableitung ist gemeint, daß sie keine anderen Voraussetzungen verwendet als diejenigen, die ausdrücklich aufgezählt werden. Bei einer Ableitung in der Wortsprache geschieht es sehr häufig, daß Voraussetzungen, die nicht angeführt sind, unvermerkt mit eingeschmuggelt werden. Die Geschichte der Geometrie liefert zahlreiche Beispiele hierfür, besonders in den Versuchen, Euklids Parallelenaxiom aus den andern Axiomen abzuleiten. Ein weiterer Vorzug der Verwendung künstlicher Symbole anstatt der Wörter einer natürlichen Sprache liegt in der Kürze und Übersichtlichkeit der symbolischen Formeln. Häufig kann ein Satz, der in der Wortsprache viele Zeilen einnimmt und daher ganz unübersichtlich ist, in Symbolen auf einer oder einer halben Zeile dargestellt werden. Die Kürze und Übersichtlichkeit erleichtert das Operieren, Vergleichen und Schließen außerordentlich. Beide Vorzüge, der der Exaktheit und der der Kürze, kommen ja auch der üblichen mathematischen Schreibweise zu. Die Entwicklung der Mathematik zu ihrer gegenwärtigen hohen Stufe wäre nicht etwa nur schwieriger, sondern psychologisch unmöglich gewesen, wenn die Mathematiker bei der Verwendung von Wörtern geblieben wären, anstatt Ziffern und andere besondere Symbole einzuführen; um das deutlicher zu sehen, übersetze man z. B. eine so elementare Formel wie „$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$" in die Wortsprache! („Die dritte Potenz der Summe zweier beliebiger Zahlen ist gleich der Summe der folgenden Summanden: ...".) Denselben Vorzug, den die Mathematik aus der symbolischen Methode für ihre Untersuchungen von Zahlen, Zahlfunktionen usw. gewonnen hat, will die symbolische Logik ganz allgemein gewinnen für die Behandlung ganz beliebiger Begriffe.

Bei der Aufstellung unserer symbolischen Sprachsysteme wird es häufig vorkommen, daß ein neuer, exakt definierter Begriff eingeführt wird, der an die Stelle eines schon üblichen, aber nicht hinreichend exakten Begriffes tritt. Wir nennen dann den neuen Begriff ein Explikat für den alten und seine Einführung eine Explikation. (Der zu explizierende alte Begriff wird zuweilen das Explikandum genannt.) So ist z. B. der Begriff der L-Wahrheit, der auf Grund exakter Regeln technisch definiert werden wird (**5b**), ein Explikat für den in der Philosophie und der traditionellen Logik häufig verwendeten, aber nicht hinreichend exakt definierten Begriff der logischen oder notwendigen Wahrheit. Und der Begriff der induktiven Kardinalzahlen (Symbol ‚*Str*$_1$*Induct*', **37c**) ist ein Explikat für den in Mathematik, Logik und Philosophie viel verwendeten, aber vor FREGE niemals exakt definierten Begriff der endlichen Anzahl. [Für eine ausführlichere Erörterung der Methoden der Explikation und der Forderungen, die ein adäquates Explikat erfüllen muß, s. CARNAP [Probability], Kap. I.]

1b. Die Entwicklung der symbolischen Logik. Die symbolische Logik ist etwa um die Mitte des vorigen Jahrhunderts begründet und bis in die Gegenwart hinein mehr von Mathematikern als von Philosophen weitergebildet worden (vgl. die Literaturhinweise im Anhang, **57**). Der

Grund hierfür liegt in der historischen Tatsache, daß die Mathematiker sich im Lauf des vorigen Jahrhunderts immer mehr bewußt wurden, daß die Fundamente des Gebäudes der Mathematik einer gründlichen Nachprüfung und Sicherstellung bedurften. Sie fanden, daß die traditionelle (aristotelisch-scholastische) Logik als Instrument für den Neuaufbau völlig unzulänglich war, und machten sich deshalb daran, ein eigenes, genaueres und umfassenderes System der Logik zu entwickeln. Die neue, symbolische Logik hat, besonders in den Systemen von FREGE, WHITEHEAD-RUSSELL und HILBERT, ihre Eignung für diese erste Aufgabe, die ihr gestellt wurde, deutlich erwiesen, nämlich als Grundlage für einen Neuaufbau der Mathematik (der Arithmetik, der Analysis, der Funktionentheorie und der Infinitesimalrechnung) zu dienen. Ferner hat sie in der Logik der Relationen zunächst eine abstrakte Theorie beliebiger Ordnungsformen aufgebaut, dadurch aber auch die Möglichkeit geschaffen, Theorien, in denen Relationen eine wesentliche Rolle spielen, darzustellen und logisch zu analysieren — wie z. B. die verschiedenen Geometrien, physikalische Theorien, besonders in bezug auf Raum und Zeit, Erkenntnistheorie und neuerdings auch gewisse Zweige der Biologie. Dies ist ein besonders bedeutungsvoller Schritt über die traditionelle Logik hinaus, die die Relationen fast ganz außer acht gelassen hatte und daher für die in den letzten Jahrzehnten so bedeutungsvoll gewordene axiomatische Methode, etwa in der Geometrie, gänzlich unbrauchbar war. Ein mehr negatives, aber doch wichtiges Verdienst der symbolischen Logik besteht ferner darin, daß sie die vollständige Auflösung gewisser Widersprüche gebracht hat, nämlich der sogenannten logischen Antinomien (vgl. **21 c**), zu deren Analyse und Ausschaltung die Mittel der alten Logik nicht ausreichen.

Über die Literatur des hier behandelten Gebietes siehe die Hinweise, **57**. In den Zitaten im Text dieses Buches werden abgekürzte Titel verwendet, vgl. das Literaturverzeichnis, **56**. (Ohne Autorname werden verwendet: ‚[P. M.]' für: WHITEHEAD und RUSSELL, Principia Mathematica, und Hinweise auf einige meiner Bücher.)

Zur Terminologie. Für das Gebiet der symbolischen Logik wurden früher auch die Ausdrücke „algebraische Logik", „Algebra der Logik" und andere verwendet, die heute nicht mehr üblich sind. Außer den Bezeichnungen „symbolische Logik" und „mathematische Logik" wird auch, besonders auf dem europäischen Kontinent, die Bezeichnung „Logistik" häufig verwendet; sie ist kurz und erlaubt die Bildung des Adjektivs „logistisch". Das Wort „Logistik" bedeutet ursprünglich Rechenkunst; es wurde als Bezeichnung für die symbolische Logik im Jahr 1904 von COUTURAT, ITELSON und LALANDE unabhängig voneinander vorgeschlagen (nach Angabe von ZIEHEN, Lehrbuch der Logik, S. 173, Anm. 1, und MEINONG, Die Stellung der Gegenstandstheorie, S. 115).

Über die Leistungen der neuen, symbolischen Logik im Vergleich zur traditionellen Logik vgl. RUSSELL [Außenwelt] Kap. II; CARNAP [Neue Logik]; MENGER [Logik]. Über die besondere Wichtigkeit der Logik der Relationen vgl. RUSSELL [Außenwelt] 49—67.

Zum Neuaufbau der Mathematik auf der Grundlage der neuen Logik vgl. die grundlegenden älteren Werke: FREGE [Grundlagen] und [Grundgesetze]; PEANO [Formulaire]; als Hauptwerk: [P. M.]; ferner RUSSELL [Einführung]; neueres Werk: HILBERT und BERNAYS [Grundlagen]; leichtver-

ständliche Darstellung der Grundgedanken: Carnap, Die Mathematik als Zweig der Logik, Bl. f. dt. Philos. 4, 1930; Carnap, Die logizistische Grundlegung der Mathematik, Erkenntnis 2, 1931.

2. Individualkonstanten und Prädikate

2a. Individualkonstanten und Prädikate. Die theoretische Behandlung irgend eines Gegenstandsbereiches besteht darin, daß man Sätze über die Gegenstände des Bereiches aufstellt, in denen den Gegenständen gewisse Eigenschaften und Relationen zugeschrieben werden, und daß man Regeln aufstellt, nach denen aus gegebenen Sätzen andere abgeleitet werden können. Die in einem bestimmten Sprachsystem behandelten Grundgegenstände nennen wir auch die Individuen des Systems und ihre Gesamtheit den Individuenbereich oder kurz den Bereich des Systems. Damit man Sätze über die Individuen eines gegebenen Bereiches bilden kann, müssen vor allem zwei Arten von Zeichen in der Sprache verfügbar sein: 1. Namen für die Individuen des Bereiches; wir nennen sie Individualkonstanten; 2. Bezeichnungen für Eigenschaften und Relationen, die von den Individuen ausgesagt werden sollen; wir nennen sie Prädikate.

In diesem Kapitel I A wollen wir eine einfache symbolische Sprache aufbauen, die wir Sprache A nennen. Später, in den Kapiteln I B und I C, werden wir Sprachen B und C entwickeln, die nahe verwandt mit Sprache A sind, aber weitere Ausdrucksmittel enthalten.

Als Individualkonstanten wollen wir die Buchstaben ‚*a*', ‚*b*', ‚*c*', ‚*d*', ‚*e*' verwenden. Soll unsere Sprache z. B. auf den Bereich der Himmelskörper angewendet werden, so mag etwa ‚*a*' die Sonne bezeichnen, ‚*b*' den Mond usw. Bei der Anwendung auf eine bestimmte Personengruppe mag ‚*a*' als Abkürzung für ‚Karl Schmidt' genommen werden, ‚*b*' für ‚Hans Müller' usw. Innerhalb rein logischer Betrachtungen werden wir uns nicht darum kümmern, für welchen besondern Individuenbereich unsere Sprache verwendet werden soll, und welche besondern Individuen dieses Bereiches gerade mit ‚*a*', mit ‚*b*' usw. bezeichnet werden sollen. Erst wenn wir aus der reinen Logik (d. h. aus der Betrachtung des Sprachskeletts, das wir im folgenden aufbauen) herausgehen, werden wir von der Deutung der einzelnen Individualkonstanten und Prädikate sprechen. Das geschieht z. B. im zweiten Teil dieses Buches, wo einige Systeme als Anwendungen dargestellt werden; ferner im ersten Teil zuweilen bei Gelegenheit erläuternder Beispiele.

Als Prädikate wollen wir die Buchstaben ‚*P*', ‚*Q*', ‚*R*', ‚*S*' ‚*T*' verwenden; und in den Anwendungsbeispielen verschiedene Buchstabengruppen (in Anlehnung an Wörter der Wortsprache) mit großem Anfangsbuchstaben (s. die Beispiele in 2c). Bei einer bestimmten Anwendung bezeichne z. B. ‚*P*' die Eigenschaft Kugelförmig. [Dies schreiben wir anstatt der umständlichen Wendung „die Eigenschaft, kugelförmig zu sein". Analog schreiben wir „die Eigenschaft Primzahl", „die Eigenschaft Ungerade" und dergleichen. Ferner auch „die Klasse Kugelförmig" anstatt „die Klasse der kugelförmigen Individuen"; analog

„die Klasse Blau" und dergleichen. In ähnlicher Weise schreiben wir „die Relation Größer" anstatt „die Relation, die zwischen x und y besteht, wenn x größer als y ist"; analog „die Relation Gleichaltrig", „die Relation Vater" und dergleichen.] Nehmen wir dann ‚a' als Bezeichnung für die Sonne und ‚b' für den Mond, so schreiben wir in unserer symbolischen Sprache den Satz ‚$P(a)$' für „Die Sonne ist kugelförmig". Entsprechend ist ‚$P(b)$' die Übersetzung des deutschen Satzes „Der Mond ist kugelförmig" in unsere Sprache. Um den Satz „Die Sonne ist größer als der Mond" übersetzen zu können, müssen wir ein Zeichen haben, das die Relation Größer ausdrückt. Nehmen wir hierfür ‚R', so dient ‚$R(a, b)$' als Übersetzung für „Die Sonne ist größer als der Mond". Sind a und b Personen (d. h. werden ‚a' und ‚b' als Personennamen gedeutet), und nehmen wir ‚S' als Bezeichnung für die Relation Gleichaltrig, so heißt ‚$S(a, b)$': „a hat dasselbe Alter wie b". Ebenso können wir den Satz „a ist eifersüchtig auf b wegen c" übersetzen in ‚$T(a, b, c)$', wenn wir ‚T' als Zeichen für die dreistellige Relation Eifersüchtig nehmen.

In den Sätzen ‚$P(a)$' und ‚$R(b, c)$' heißen ‚a', ‚b' und ‚c' Argumentausdrücke. ‚b' steht an erster Argumentstelle, ‚c' an zweiter. ‚P' ist ein einstelliges Prädikat, ‚R' ein zweistelliges. Allgemein: Ein Prädikat heißt n-stellig oder vom Grad n, wenn es n Argumentstellen bei sich hat. Man kann auch Prädikate von höherem Grad als 2 einführen, sobald man sie für die Behandlung eines gegebenen Gegenstandsbereiches benötigt. ‚$P(a)$' heißt ein Vollsatz des Prädikates ‚P', ebenso ‚$R(b, c)$' ein Vollsatz von ‚R'. In den genannten Beispielen sind die Prädikate und die Argumentausdrücke einzelne Buchstaben, nicht Buchstabengruppen (wie in den Beispielen am Ende dieses Paragraphen) oder zusammengesetzte Ausdrücke. In solchen Fällen lassen wir gewöhnlich die Klammern und Kommas weg, schreiben also einfach ‚Pa', ‚Rab', ‚$Tabc$' usw.

Zur Terminologie. 1. In den gewöhnlichen Wortsprachen gibt es kein Wort, das Eigenschaften und Relationen zusammenfaßt. Da es zweckmäßig ist, ein solches Wort zu haben, wollen wir festsetzen, daß im folgenden das Wort „Attribut" in diesem Sinn verwendet werden soll. Hiernach ist ein einstelliges Attribut eine Eigenschaft, ein zwei- oder mehrstelliges Attribut ist eine Relation. — 2. In analoger Weise ist es zweckmäßig, ein zusammenfassendes Wort für die Bezeichnungen von ein- und mehrstelligen Attributen zu haben. Wir wollen hierfür (wie HILBERT) das Wort „Prädikat" verwenden. (Dieses Wort wurde bisher meist nur für Eigenschaften oder für Bezeichnungen von solchen verwendet, nicht für mehrstellige Attribute oder Prädikate.) Ein einstelliges Prädikat ist ein Zeichen für ein einstelliges Attribut (d. h. eine Eigenschaft); allgemein: ein n-stelliges Prädikat ist ein Zeichen für ein n-stelliges Attribut. — 3. Wir wollen stets deutlich zwischen Zeichen und Bezeichnetem unterscheiden. Die Nicht-Beachtung dieser Unterscheidung hat in der Logik und allgemein in der Philosophie schon viel Verwirrung angerichtet (vgl. [Syntax] 42). Wenn wir über einen Ausdruck sprechen, wollen wir ihn stets in Anführungszeichen setzen oder eine besondere Bezeichnung für ihn verwenden, wie etwa die syntaktischen Frakturzeichen, vgl. **21a**. Wir lassen aber die Anführungszeichen weg, wenn der Ausdruck für sich auf einer Zeile steht (unter Umständen mit einer ihn bezeichnenden Nummer oder einem Buchstaben); s. z. B. die Aufzählung der Formeln in L8—2. Wird z. B. ‚Pa' als Übersetzung für „a ist alt" ge-

nommen, so sagen wir: „*P* (nicht: ‚*P*‘) ist ein einstelliges Attribut, nämlich die Eigenschaft Alt; dieses Attribut wird bezeichnet durch ein einstelliges Prädikat ‚*P*‘.“ Ebenso: „Die zweistellige Relation *R* besteht zwischen den und den Personen“, „Das zweistellige Prädikat ‚*R*‘ kommt in dem und dem Satz vor“. Und entsprechend: „Das Individuum *a* ...“, „der Name ‚*a*‘ ...“.

2b. Satzkonstanten. Es ist häufig umständlich, mit voll ausgeschriebenen Sätzen wie ‚*Pa*‘ oder ‚*Rbc*‘ zu arbeiten, besonders wenn die Sätze noch viel länger sind und in einem bestimmten Zusammenhang oft wiederholt werden. Darum wollen wir zuweilen die Buchstaben ‚*A*‘, ‚*B*‘, ‚*C*‘ — wir nennen sie Satzkonstanten — als Abkürzungen für irgend welche Sätze der symbolischen Sprache verwenden. So mag z. B. in einem bestimmten Fall ‚*A*‘ als Abkürzung für ‚*Pa*‘ genommen werden; sobald dann ‚*P*‘ und ‚*a*‘ gedeutet werden, ist damit auch ‚*A*‘ gedeutet. Meist werden wir bei der Verwendung einer Satzkonstanten offen lassen, für welchen bestimmten Satz sie als Abkürzung dient.

2c. Prädikate für Beispiele. Um in dem weiteren Aufbau unseres symbolischen Sprachsystems bequemer Beispiele bilden zu können, wollen wir einige Prädikate, Funktoren (vgl. 18) und Individualkonstanten für gewisse Individuenbereiche einführen.

1. Bereich: die physischen Dinge.

mond	der Mond.
Buch (*a*)	*a* ist ein Buch
Blau (*a*)	*a* ist blau
Kug (*a*)	*a* ist kugelförmig

2. Bereich: die (gegenwärtig lebenden) Menschen.

Ml (*a*)	*a* ist männlich
Wl (*a*)	*a* ist weiblich
Stud (*a*)	*a* ist ein Student (oder eine Studentin)
Va (*a*, *b*)	*a* ist Vater von *b*
Mu (*a*, *b*)	*a* ist Mutter von *b*
Elt (*a*, *b*)	*a* ist ein Elter (d. h. einer der Eltern) von *b*
Bru (*a*, *b*)	*a* ist Bruder von *b*
Eh (*a*, *b*)	*a* ist Ehemann von *b*
Freund (*a*, *b*)	*a* ist Freund von *b*

3. Bereich: die natürlichen Zahlen (0, 1, 2, usw.).

0, 1, 2, ...	(in der üblichen Bedeutung)	
Gerad (*a*)	*a* ist eine gerade Zahl	
Prim (*a*)	*a* ist eine Primzahl	
Gr (*a*, *b*)	*a* ist größer als *b*	$(a > b)$
Kl (*a*, *b*)	*a* ist kleiner als *b*	$(a < b)$
Vorg (*a*, *b*)	*a* ist unmittelbarer Vorgänger von *b*	$(a + 1 = b)$
Quadr (*a*, *b*)	*a* ist das Quadrat von *b*	$(a = b^2)$
quadr (*a*)	das Quadrat von *a*	(a^2)
prod (*a*, *b*)	das Produkt von *a* und *b*	$(a \, . \, b)$

‚*quadr*‘ und ‚*prod*‘ sind Funktoren, vgl. 18.

3. Satzverknüpfungen

3a. Deskriptive und logische Zeichen. Die Individualkonstanten und Prädikate, die wir bisher kennengelernt haben, sind gewöhnlich (nämlich in den beiden ersten der in **2c** genannten drei Bereiche) deskriptive (oder nicht-logische) Zeichen, d. h. solche, die Dinge oder Vorgänge in der Welt oder Eigenschaften oder Relationen von Dingen oder dergleichen bezeichnen. Ihnen wird erst bei der Anwendung, also außerhalb der reinen Logik, eine bestimmte Bedeutung beigelegt. Von den deskriptiven Zeichen unterscheiden wir die logischen Zeichen; sie beziehen sich nicht selbst auf etwas Gegenständliches, können aber in Verbindung mit deskriptiven Zeichen in Sätzen über empirische Gegenstände verwendet werden. Ihre Verwendung wird durch die logischen Regeln der Sprache festgelegt; den deskriptiven Zeichen wird dagegen ihre Bedeutung bei der Anwendung auf einen bestimmten Individuenbereich willkürlich beigelegt.

Die Klammern und das Komma (‚(', ‚)', ‚,') (z. B. in ‚*Va* (*a*, *b*)') gehören mit zu den logischen Zeichen. Sie sind aber nur von untergeordneter Bedeutung, wie etwa Interpunktionszeichen. Wichtigere logische Zeichen sind die Verknüpfungszeichen. Sie werden verwendet, um aus einfacheren Sätzen (z. B. Vollsätzen von Prädikaten) zusammengesetzte Sätze zu bilden. Bei der folgenden Einführung der Verknüpfungszeichen bestimmen wir ihre Verwendungsweise und damit ihre Bedeutung in zweifacher Weise: 1. durch Angabe der Wahrheitsbedingungen für die zusammengesetzten Sätze, 2. durch Übersetzung in die deutsche Sprache. Die Angaben der zweiten Art sind zwar leichter verständlich, aber weniger genau, da die zu verwendenden Wörter der deutschen Sprache den Verknüpfungszeichen zuweilen nur angenähert entsprechen und ferner in ihrer üblichen Verwendung oft mehrdeutig sind. Die Angabe der Wahrheitsbedingungen für ein Verknüpfungszeichen besteht in einer Festsetzung, durch die bestimmt wird, unter welchen Bedingungen ein aus diesen Verknüpfungszeichen und Teilsätzen gebildeter zusammengesetzter Satz wahr ist, bezogen auf Wahrheit und Falschheit der Teilsätze.

3b. Verknüpfungszeichen. Sind zwei Sätze ‚*A*' und ‚*B*' gegeben, so wird der Satz ‚(*A*) $\vee$ (*B*)' ihre Disjunktion genannt (auch Alternative oder logische Summe). Der Disjunktionssatz soll dann und nur dann wahr sein, wenn mindestens einer der beiden Sätze ‚*A*' und ‚*B*' wahr ist, mit andern Worten: Wenn entweder ‚*A*' wahr ist oder ‚*B*' wahr ist oder beide wahr sind. Das Disjunktionszeichen ‚$\vee$' entspricht ziemlich genau dem deutschen Wort „oder" in solchen Fällen, wo dieses zwischen Sätzen steht und wo es, was meist der Fall ist, im nicht-ausschließenden Sinn gemeint ist; ein deutscher Satz der Form ‚*A* oder *B*' ist im ausschließenden Sinn gemeint, wenn er bedeutet: „Entweder *A* oder *B*, aber nicht *A* und *B*". ‚(*Pa*) $\vee$ (*Qb*)' heißt demnach soviel wie: „*a* ist *P* oder *b* ist *Q* oder beides ist der Fall". ‚*Stud* (*a*) $\vee$ *Wl* (*a*)' heißt „*a* ist entweder ein Student oder eine weibliche Person oder auch beides, d. h. eine Studentin". — Für Klammern,

die Teilsätze eines Satzes einschließen, wollen wir unterschiedslos sowohl runde als eckige Klammern zulassen.

‚$(A) \,.\, (B)$' — die Konjunktion (oder das logische Produkt) von ‚A' und ‚B' — soll dann und nur dann wahr sein, wenn ‚A' und ‚B' beide wahr sind. Das Konjunktionszeichen ‚.' entspricht daher dem deutschen Wort „und" (wo dieses zwischen Sätzen steht). ‚$(Pa) \,.\, (Qb)$' heißt „a ist P und b ist Q". ‚*Stud* (a) . *Wl* (a)' heißt: „a ist eine Studentin".

Während Disjunktions- und Konjunktionszeichen zwei Sätze miteinander verknüpfen, wird das Negationszeichen ‚$\sim$' in Verbindung mit Einem Satz verwendet. ‚$\sim (A)$' soll dann und nur dann wahr sein, wenn ‚A' nicht wahr (also falsch) ist. Das Negationszeichen entspricht daher dem deutschen Wort „nicht", wobei jedoch zu beachten ist, daß es sich auf den ganzen Satz bezieht, während „nicht" meist auf einen Teilausdruck des ganzen Satzes bezogen ist. ‚$\sim P\,(a)$' heißt hiernach: „a ist nicht P". ‚$\sim$ *Ger* (3)' heißt: „3 ist nicht gerade".

‚$(A) \supset (B)$' ist Abkürzung für ‚$[\sim (A)] \vee (B)$', ist also dann und nur dann wahr, wenn entweder ‚A' falsch ist oder ‚B' wahr ist oder beides der Fall ist. ‚$(A) \supset (B)$' entspricht in manchen Fällen dem deutschen „wenn A, so B". Es besteht jedoch ein wichtiger Unterschied zwischen den beiden Sätzen. Der wenn-Satz wird in der deutschen Sprache nur verwendet, wenn ein Zusammenhang (etwa logischer oder kausaler Art) zwischen den beiden Teilsätzen besteht. Dagegen ist die Verwendung des $\supset$-Satzes in unserer symbolischen Sprache nicht in dieser Hinsicht beschränkt. Heißt ‚A' „Mein Schreibtisch ist schwarz", so ist ‚[*Blau* (*mond*)] $\supset (A)$' wahr, weil ‚*Blau*(*mond*)' falsch ist, gleichgültig, ob ‚A' wahr oder falsch ist. (In der deutschen Sprache wird dagegen der Satz „Wenn der Mond blau ist, so ist mein Schreibtisch schwarz" wohl kaum als ein korrekter, zutreffender Satz behandelt; er gehört zu den vielen Sätzen der Wortsprache, die man, auch wenn man über die Teilsätze hinreichend Bescheid weiß, weder zu den wahren noch zu den falschen Sätzen zu rechnen pflegt; derartige Sätze gibt es in einer wohlgebauten Sprache nicht.) Ebenso ist der Satz ‚$(A) \supset$ [*Kug*(*mond*)]' unabhängig von A wahr, weil ‚*Kug*(*mond*)' wahr ist. Später werden wir eine Klasse von Sätzen kennenlernen, bei denen die Übersetzung von ‚$\supset$' durch „wenn — so" stets zutreffend ist (9c). Um die manchmal nicht ganz zutreffende wenn-Übersetzung zu vermeiden, kann man die stets zutreffende, wenn auch umständlichere Übersetzung „nicht A, oder B" für ‚$(A) \supset (B)$' anwenden. — Das Zeichen ‚$\supset$' wollen wir, weil es nun einmal üblich ist, Implikationszeichen nennen; wir lesen ‚$(A) \supset (B)$': „A impliziert B". Es ist aber zu beachten, daß ‚$\supset$' keineswegs die übliche (besonders in der englischen und französischen Sprache geläufige) Bedeutung des Wortes „Implikation" und „implizieren" hat, nämlich die des (logischen) Enthaltens; ‚$(A) \supset (B)$' besagt keineswegs, daß ‚B' eine Folge von ‚A' oder aus ‚A' deduzierbar ist. Aus den vorhin genannten Beispielen geht das deutlich hervor. [Man hüte sich daher vor der Übersetzung von ‚$(A) \supset (B)$' in „Aus A folgt B".] Die Wahl der Bezeichnung „Implikationszeichen" geht auf die genannte irrtümliche Deutung zurück und hat schon viel

Unklarheit gestiftet (vgl. [Syntax] **69** am Schluß). Da sie aber allgemein gebräuchlich ist, wollen wir sie, losgelöst von der ursprünglichen Bedeutung des Wortes, als technischen Ausdruck beibehalten. [Die hier gemeinte technische Bedeutung wird zuweilen „materielle Implikation" genannt, im Unterschied zu der „logischen Implikation", d. h. der Relation, die zwischen ‚A' und ‚B' besteht, wenn ‚B' logische Folge von ‚A' ist. Um jede Möglichkeit einer Mißdeutung zu vermeiden, könnte man erwägen, Bezeichnungen wie „Bedingungssatz" oder „Konditionalsatz" anstatt „Implikationssatz" zu gebrauchen, und ‚$(A) \supset (B)$' lesen: „Wenn A, so B".]

‚$(A) \equiv (B)$' — die Äquivalenz von ‚A' und ‚B' — soll dann und nur dann wahr schein, wenn ‚A' und ‚B' entweder beide wahr oder beide falsch sind. Man beachte, daß „Äquivalenz" (zuweilen „materielle Äquivalenz" genannt) nur die Gleichheit des Wahrheitswertes (s. **4a**) besagt, nicht Gleichheit des Sinnes der beiden Glieder oder logische Äquivalenz (**6a**). ‚$(A) \equiv (B)$' wird gelesen: „A äquivalent B" (oder „A dann und nur dann, wenn B").

3c. Fortlassen von Klammern. Bisher haben wir als Glieder für die Satzverknüpfungen meist Sätze der einfachsten Form genommen. Es können aber auch Sätze, die selbst schon zusammengesetzt sind, als Glieder einer Verknüpfung auftreten, z. B. ‚$\sim (A)$' in ‚$(\sim (A)) \vee (B)$' und ‚$(A) \vee (B)$' in ‚$[(A) \vee (B)] \,.\, (C)$'. Da hierbei eine starke Häufung von Klammern auftritt, wollen wir für die Praxis folgende Regeln zur Ersparung von Klammern aufstellen. Wir formulieren die Regeln nicht nur für Sätze, sondern allgemeiner für Satzformeln; das sind Sätze und andere ähnliche Ausdrücke (**7a**). Es soll erlaubt sein, Klammern, die eine Teilformel einschließen, fortzulassen, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. Die eingeschlossene Teilformel ist von einfachster Form, d. h. sie enthält keine andere Satzformel als echten Teil. [Beispiele: ‚$A \vee B$', ‚$\sim Pa$'.]

2. Die eingeschlossene Teilformel besteht aus einer stärkeren Verknüpfung als die, von der sie ein Glied ist. Hierbei nennen wir ‚$\sim$' stärker als ‚$\vee$' und ‚$.$', und diese stärker als ‚$\supset$' und ‚$\equiv$'. [Beispiele: Anstatt ‚$(\sim A) \vee B$' dürfen wir schreiben: ‚$\sim A \vee B$', und ebenso anstatt ‚$(\sim A) \,.\, B$' kurz ‚$\sim A \,.\, B$', und anstatt ‚$(\sim A) \supset B$' kurz ‚$\sim A \supset B$', weil ‚$\sim$' stärker ist als die übrigen Verknüpfungen; ferner anstatt ‚$(A \vee B) \supset (C \,.\, D)$' kurz ‚$A \vee B \supset C \,.\, D$', weil ‚$\vee$' und ‚$.$' stärker sind als ‚$\supset$'; ebenso anstatt ‚$(A \,.\, B) \equiv (C \vee D)$' kurz ‚$A \,.\, B \equiv C \vee D$'.]

3. Die eingeschlossene Teilformel ist eine Disjunktion und selbst Glied einer Disjunktion, oder sie ist eine Konjunktion und Glied einer Konjunktion. [Beispiele: Anstatt ‚$(A \vee B) \vee C$' schreiben wir ‚$A \vee B \vee C$'; ebenso anstatt ‚$A \vee (B \vee C)$'. Anstatt ‚$(A \,.\, B) \,.\, C$' schreiben wir ‚$A \,.\, B \,.\, C$'; ebenso anstatt ‚$A \,.\, (B \,.\, C)$'. Vgl. **8c**, Bemerkung zu den Lehrsätzen L8—6 m.]

4. Die Wahrheitstafeln

4a. Wahrheitstafeln. Wir nennen Wahrheit und Falschheit die beiden möglichen Wahrheitswerte eines Satzes. Da jeder Satz entweder wahr oder falsch ist, so ergeben sich für zwei Sätze ‚*A*' und ‚*B*' (falls sie unabhängig voneinander sind) vier mögliche Fälle für die Wahrheitswerte: Entweder sind beide wahr, oder nur der erste, oder nur der zweite, oder keiner von beiden. Bezeichnen wir Wahrheit mit ‚W', Falschheit mit ‚F', so sind die vier Fälle: WW, WF, FW, FF. Auf Grund der früher angegebenen Wahrheitsbedingungen für ‚$A \vee B$' ist dieser Satz in den drei ersten Fällen wahr, im vierten falsch. ‚$A \,.\, B$' ist nur im ersten Fall wahr, in den übrigen falsch. ‚$A \supset B$' ist nur im zweiten Fall falsch, in den übrigen wahr. ‚$A \equiv B$' ist im ersten und im letzten Fall wahr, in den übrigen falsch. Die folgende Tabelle, genannt Wahrheitstafel (oder Wahrheitswerttafel), gibt die Wahrheitswerte der zusammengesetzten Sätze für die vier möglichen Fälle an. Die Buchstaben ‚W' und ‚F' sind nicht Zeichen unserer symbolischen Sprache, sondern nur Abkürzungen für die Wörter ‚wahr' und ‚falsch' der deutschen Sprache, die hier als Metasprache dient, d. h. als diejenige Sprache, in der wir über die symbolische Sprache sprechen (**14a**). Ebenso gehören die Wahrheitstafeln nicht zur symbolischen Sprache, sondern zur Metasprache. Sie stellen in Form von Tafeln diejenigen Angaben über die Wahrheitsbedingungen der Satzverknüpfungen der symbolischen Sprache dar, die wir in **3b** in deutschen Worten formuliert haben. (Besonders wichtige Theoreme, Definitionen, Regeln, Tafeln oder dergleichen werden mit ‚+' markiert, wie hier die Tafeln I und II.)

+ Wahrheitstafel I

	(1) A B	(2) $A \vee B$	(3) $A \,.\, B$	(4) $A \supset B$	(5) $A \equiv B$
1.	W W	W	W	W	W
2.	W F	W	F	F	F
3.	F W	W	F	W	F
4.	F F	F	F	W	W

Da ein Negationssatz nur Einen Teilsatz enthält, haben wir hier nur zwei mögliche Fälle:

+ Wahrheitstafel II

	(1) A	(2) $\sim A$
1.	W	F
2.	F	W

Mit Hilfe der aufgestellten Wahrheitstafeln können auch die Wahrheitswerte eines komplizierten Satzes, der etwa aus n verschiedenen Teilsätzen ($n = 1, 2, \ldots$) mit Hilfe der angegebenen Verknüpfungszeichen aufgebaut ist, für die verschiedenen Möglichkeiten der Wahrheitswerte seiner Teilsätze festgestellt werden. Man wird zunächst in der ersten Rubrik die 2^n möglichen Fälle für die n Teilsätze aufstellen. Dann bestimmt man für jeden dieser Fälle, ausgehend von den kleinsten Teilsätzen, schrittweise die Wahrheitswerte für zusammengesetzte Teilsätze und schließlich die Verteilung für den ganzen Satz.

Beispiele. Mit Einem Teilsatz, Wahrheitstafel III. Beispiel 1. Gegeben sei der Satz ‚$A \vee \sim A$'. Da nur der Teilsatz ‚A' vorkommt, stellen wir eine Wahrheitswerttafel mit zwei Zeilen auf (Tafel III). Die Werte für Rubrik (2) entnehmen wir aus Tafel II. Die Werte in Rubrik (3) finden wir in folgender Weise. Es handelt sich um die Wahrheitswerte einer Disjunktion. In der ersten Zeile sind die Werte der beiden Glieder der Disjunktion — wie wir aus der Rubrik (1) und (2) ersehen — WF. Wie wir aus Tafel I Rubrik (2), zweite Zeile entnehmen, hat eine Disjunktion für die Werte WF ihrer Glieder den Wert W. Daher tragen wir in Tafel III, Rubrik (3), Zeile 1 ‚W' ein. Ebenso finden wir aus Tafel I für FW den Wert W und tragen diesen in III (3) ein. Damit ist die Wertverteilung für den gegebenen Satz gefunden. — Beispiel 2. Satz ‚$A \,.\, \sim A$'. Tafel III (4). Mit Hilfe von I (3) finden wir für die Werte WF der Glieder den Wert F der Konjunktion, und denselben für die Werte FW.

Wahrheitstafel III

	(1) A	(2) $\sim A$	(3) $A \vee \sim A$	(4) $A \,.\, \sim A$
1.	W	F	W	F
2.	F	W	W	F

Wahrheitstafel IV

	(1) A B	(2) $A \vee B$	(3) $\sim(A \vee B)$	(4) $\sim A$	(5) $\sim B$	(6) $\sim A \,.\, \sim B$	(7) $\sim(A \vee B) \equiv \sim A \,.\, \sim B$
1.	W W	W	F	F	F	F	W
2.	W F	W	F	F	W	F	W
3.	F W	W	F	W	F	F	W
4.	F F	F	W	W	W	W	W

Mit zwei Teilsätzen, Wahrheitstafel IV. Beispiel 3. Die Verteilung der Wahrheitswerte für ‚$\sim (A \vee B)$' soll festgestellt werden. Wir entnehmen zunächst die Wertverteilung für ‚$A \vee B$' (Tafel IV, Rubrik (2)) aus Tafel I, Rubrik (2). Aus II (2) lernen wir, daß die Negation eines Satzes den entgegengesetzten Wahrheitswert hat wie dieser selbst; daher tragen wir in IV (3) die Werte ein, die denen in IV (2) entgegengesetzt sind. — Beispiel 4. Verteilung der Wahrheitswerte für ‚$\sim A \,.\, \sim B$'. Wir finden zunächst die Verteilung für ‚$\sim A$' (IV (4)), indem wir die Werte nehmen, die denen für ‚A' in IV (1) entgegengesetzt sind; analog die für ‚$\sim B$' (IV (5)). Dann wird IV (6) in folgender Weise gefunden. Satz (6) ist die Konjunktion der Sätze (4) und (5). Im ersten Fall haben (4) und (5) die Werte FF; aus I (3) Zeile 4 entnehmen wir, daß eine Konjunktion für die Werte FF ihrer Glieder den Wert F hat; also tragen wir diesen Wert in IV (6) erste Zeile ein. Im zweiten

Fall finden wir für die Glieder FW, also für den ganzen Satz wieder F. Im dritten Fall finden wir für die Glieder WF, also für den ganzen Satz F. Im vierten Fall finden wir für die Glieder WW, also für die Konjunktion W. Damit sind die Werte für Rubrik (6) gefunden. — Beispiel 5. Verteilung für (7) ‚$\sim (A \vee B) \equiv \sim A \,.\, \sim B$'. Die Verteilung für die beiden Glieder dieser Äquivalenz haben wir vorher gefunden: IV (3) und (6). Da für diese Glieder nur die Verteilungen FF und WW vorkommen, so finden wir für den Satz selbst überall den Wert W, mit Hilfe von I (5), Zeile 4 und 1.

Das folgende Verfahren ist im wesentlichen dasselbe wie das oben beschriebene, nur in vereinfachter Form. Die Wahrheitswerte für einen Teilsatz schreiben wir nicht in eine getrennte Rubrik, sondern unter den betreffenden Buchstaben bzw. unter das Hauptverknüpfungszeichen des Teilsatzes in dem gegebenen Satz. So tritt z. B. Wahrheitstafel V an die Stelle von IV.

Wahrheitstafel V

$\sim$	$(A$	$\vee$	$B)$	$\equiv$	$\sim$	A	.	$\sim$	B
(5)	(1)	(3)	(1)	(7)	(4)	(2)	(6)	(4)	(2)
F	W	W	W	W	F	W	F	F	W
F	W	W	F	W	F	W	F	W	F
F	F	W	W	W	W	F	F	F	W
W	F	F	F	W	W	F	W	W	F

Beispiel. Wahrheitstafel V. Diese ist in folgenden Schritten aufgebaut (die Nummer des Schrittes ist über den Teilrubriken in der Tafel angegeben): (1) Wir tragen unter ‚A' und ‚B', wo sie zum ersten Mal vorkommen, die Wahrheitswerte ein wie in Tafel I. (2) Dieselben Werte tragen wir unter diesen Buchstaben an andern Stellen ein. (3) Unter ‚v' tragen wir die den Werten von ‚A' und ‚B' entsprechenden Werte der Disjunktion ein, auf Grund von Tafel I (2). (4) Unter den beiden Zeichen ‚$\sim$' auf der rechten Seite tragen wir die Werte gemäß Tafel II ein (also dieselben Werte wie in Tafel IV (4) bzw. (5)). (5) Unter dem ersten Zeichen ‚$\sim$' tragen wir die Werte gemäß Tafel II ein. Hierbei müssen wir beachten, daß der Wert des Satzes, auf den sich die Negation bezieht, unter seinem Hauptverknüpfungszeichen angegeben ist, also unter ‚v'. (6) Werte unter ‚.', gemäß I (3). Das sind dieselben Werte wie in IV (6). (7) Werte unter ‚$\equiv$', gemäß I (5); die Werte der Glieder stehen unter dem ersten ‚$\sim$' bzw. unter ‚.'. Dies sind dieselben Werte wie in IV (7). Damit sind die Werte für den gegebenen Satz bestimmt.

Teilweise Wahrheitstafeln. Häufig ist man nur daran interessiert festzustellen, ob ein gegebener Satz tautologisch ist, d. h., ob seine Tafel auf jeder Zeile ‚W' hat (**5a**). Wenn man vermutet, daß ein gegebener Satz tautologisch ist, so kann man durch folgendes Verfahren mit einer teilweisen Tafel feststellen, ob die Vermutung zutrifft. Man ordnet dem ganzen Satz den Wert F zu und untersucht, ob sich das durchführen läßt, indem man hier, umgekehrt wie früher, von dem Wahrheitswert des Ganzen Schritt für Schritt übergeht zu den Werten kleinerer und kleinerer Teile.

Beispiel: Wahrheitstafel VI. Wir wollen prüfen, ob der in der Tafel angegebene Satz tautologisch ist. Da er drei Teilsätze enthält, so würde die volle Wahrheitstafel acht Zeilen enthalten. Hier kommen wir mit einer Zeile aus. (1) Wir tragen unter dem Hauptzeichen ‚$\supset$' ‚F' ein. (2) Da eine Implikation, nach Tafel I (4), nur dann den Wert F hat, wenn die Glieder die Werte WF haben, so tragen wir für das erste Glied unter seinem Hauptzeichen ‚$\supset$' ‚W' ein und für das zweite Glied unter seinem Hauptzeichen ‚$\supset$'

‚F‘. (3) Eine Implikation hat W in drei Fällen, F nur in einem. Daher würden wir beim ersten Glied drei Fälle unterscheiden müssen, während es beim zweiten nur einen Fall gibt. Darum fahren wir jetzt mit dem zweiten Glied fort. Hier, wie unter (2), sind die Werte WF der Glieder eindeutig bestimmt. Wir tragen diese Werte unter ‚.‘ bzw. unter dem letzten ‚∼‘ ein. (4) Da eine Konjunktion nur dann den Wert W hat, wenn beide Glieder W haben, so tragen wir diesen Wert unter beiden ein. (5) Für das letzte ‚*B*‘ ist der Wert W eindeutig bestimmt durch Tafel II. Nun ist auf der rechten Seite des gegebenen Satzes Alles bestimmt. Daher ist es jetzt einfacher, auf der linken Seite nicht von außen nach innen vorzuschreiten, wie wir es rechts bisher getan haben, sondern umgekehrt. (6) Die rechts für ‚*A*‘, ‚*B*‘ und ‚*C*‘ gefundenen Werte, nämlich WWW, tragen wir jetzt links unter denselben Buchstaben ein. (7) Dadurch ist für ‚∼‘ links ‚F‘ eindeutig bestimmt. (8) Hiernach ist für ‚≡‘ ‚F‘ eindeutig bestimmt. (9) Aus diesem ‚F‘ und dem ‚W‘ unter dem ersten ‚*A*‘ müßte unter dem ersten ‚⊃‘ ‚F‘ stehen; da dort schon W eingetragen ist, sind unsere Eintragungen unverträglich. Das bedeutet, daß die am Anfang vorgenommene Zuordnung von F zum ganzen Satz (s. (1)) unmöglich ist. Der Satz ist somit tautologisch.

Teilweise Wahrheitstafel VI

[*A*	⊃	(∼	*B*	≡	*C*)]	⊃	(*A*	.	*C*	⊃	∼	*B*)
(6)	(2)	(7)	(6)	(8)	(6)	(1)	(4)	(3)	(4)	(2)	(3)	(5)
W	W	F	W	F	W	F	W	W	W	F	F	W
	(9)											
	F											

4b. Wahrheitsbedingung und Sinn. Die Wahrheitstafel für ein Verknüpfungszeichen gibt zunächst nur eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Wahrheit eines Satzes mit diesem Zeichen, in bezug auf die Wahrheitswerte der Glieder. Wir können uns nun aber überzeugen, daß die Angabe einer solchen Bedingung die Bedeutung des Zeichens eindeutig festlegt, daß also die weitere Angabe einer Übersetzung des Zeichens durch ein deutsches Wort oder eine Phrase theoretisch überflüssig ist, wenn sie auch vom pädagogisch-psychologischen Gesichtspunkt aus hilfreich sein mag. Angenommen, der Sinn der Sätze ‚*A*‘ und ‚*B*‘ ist dem Leser bekannt; der erstere mag etwa besagen, daß es (jetzt, in Paris) schneit, der zweite, daß es regnet. Angenommen ferner, daß ihm für das Zeichen ‚**v**‘ keine Übersetzung, sondern nur die Wahrheitstafel I (2) gegeben wird. Genügt das für ihn, um den Sinn des Satzes ‚*A* **v** *B*‘ so zu verstehen, daß er erstens weiß, ob er auf Grund seiner Tatsachenkenntnis den Satz behaupten darf, und zweitens, daß er aus einer Mitteilung in der Form dieses Satzes entnehmen kann, was über die Fakten mitgeteilt wird? Das ist in der Tat der Fall. Er ersieht aus der Wahrheitstafel, daß der Satz in den ersten drei Fällen gilt, im letzten aber nicht. Daher weiß er einerseits, daß er den Satz behaupten darf, wenn er aus der Beobachtung des Wetters ersieht, daß es regnet und schneit (Fall 1); aber auch, wenn es regnet ohne zu schneien (Fall 2), und auch, wenn es schneit ohne zu regnen (Fall 3); aber nicht, wenn es weder schneit noch regnet (Fall 4). Und wenn er den Satz als Mitteilung erhält, so entnimmt er daraus — vorausgesetzt, daß er dem Sender

Glauben schenkt —, daß einer der drei ersten Fälle vorliegt, nicht der letzte. Das kann er dann selbst in die Wortsprache übersetzen durch „Es regnet oder es schneit oder Beides ist der Fall“ oder durch „Es ist nicht der Fall, daß es weder regnet noch schneit“ oder wie immer er will. Jedenfalls braucht ihm die Übersetzung nicht auch noch angegeben zu werden; sie ist durch die Wahrheitstafel des Verknüpfungszeichens bestimmt.

Diese Überlegung zeigt allgemein: Die Kenntnis der Wahrheitsbedingungen eines Satzes ist dasselbe wie das Verstehen seines Sinnes.

5. L-Begriffe

5a. Tautologische Sätze. Der Satz $\mathfrak{S}_i$ sei aus Satzkonstanten ‚*A*‘, ‚*B*‘ usw. mit Hilfe der besprochenen Satzverknüpfungen aufgebaut. (‚$\mathfrak{S}_i$‘ ist ein Zeichen der Metasprache, das zum Hinweis auf Sätze der symbolischen Sprache dient, s. **20**, **21a**.) Unter einer Bewertung für $\mathfrak{S}_i$ verstehen wir irgend eine Zuordnung von Wahrheitswerten für die in $\mathfrak{S}_i$ vorkommenden Satzkonstanten. Für *n* verschiedene Satzkonstanten gibt es 2^n mögliche Bewertungen; sie sind dargestellt durch die Zeilen der Wahrheitstafel für die Satzkonstanten. Unter dem Spielraum von $\mathfrak{S}_i$ verstehen wir die Klasse der möglichen Bewertungen, für die $\mathfrak{S}_i$ wahr ist; sie sind dargestellt durch die mit ‚W‘ besetzten Zeilen der Wahrheitstafel. So besteht z. B. der Spielraum von ‚$A \vee B$‘, wie Wahrheitstafel I Rubrik (2) zeigt, aus den ersten drei der vier Bewertungen, die durch die vier Zeilen der Tafel dargestellt werden.

Der Spielraum von ‚$A \equiv B$‘ besteht aus der ersten und letzten Bewertung, der von ‚$A \,.\, B$‘ aus der ersten Bewertung allein. Nun können wir uns leicht klarmachen, daß ein Satz um so mehr besagt, je kleiner sein Spielraum ist. Angenommen, der Sinn der Sätze ‚*A*‘ und ‚*B*‘ ist uns bekannt. Wird uns nun ‚$A \,.\, B$‘ mitgeteilt, so erfahren wir genau, welcher von den vier möglichen Fällen, die den vier Bewertungen entsprechen, wirklich zutrifft, nämlich der erste. Die Mitteilung ‚$A \equiv B$‘ ist unbestimmter, weil sie zwei Möglichkeiten offen läßt; ‚$A \vee B$‘ ist noch unbestimmter, weil drei Möglichkeiten offen gelassen werden, und nur eine einzige ausgeschlossen wird. Hat ein Satz den totalen Spielraum, der sämtliche möglichen Bewertungen umfaßt, wie z. B. ‚$A \vee \sim A$‘ (III (3)), so schließt er gar keine Möglichkeit aus und besagt daher überhaupt nichts. Heißt ‚*A*‘ „Es regnet jetzt hier“, so heißt ‚$A \vee \sim A$‘ „Es regnet jetzt hier oder es regnet jetzt hier nicht“; und dieser Satz ist in jedem möglichen Fall wahr, ob es nun regnet oder nicht regnet. Aus seiner Mitteilung können wir daher nichts darüber lernen, welcher Fall wirklich vorliegt. Solche Sätze, die bei allen möglichen Bewertungen für ihre Teilsätze wahr sind, heißen tautologisch (oder Tautologien).

5b. Spielraum und L-Wahrheit. Angenommen, wir wollen einen gegebenen Satz untersuchen, um seinen Wahrheitswert festzustellen. Was wir hierfür zu tun haben, können wir in zwei Schritte zerlegen. Es ist klar, daß wir zunächst einmal den Satz verstehen müssen. Der erste

Schritt muß also darin bestehen, daß wir den Sinn des Satzes feststellen. Hierfür müssen wir einerseits die Bedeutung der in dem Satz vorkommenden Zeichen wissen (diese Bedeutungen mögen durch eine Liste von Bedeutungsregeln gegeben sein, z. B. in Form eines Wörterbuches) und anderseits die Form des Satzes in Betracht ziehen, d. h. die Weise, in der die Zeichen zusammengestellt sind. Der zweite Schritt besteht darin, daß das, was der Satz besagt, mit den Fakten verglichen wird, auf die er sich bezieht. Der Sinn des Satzes bestimmt, welche Fakten in Betracht kommen, d. h. welche Gegenstände und welche Eigenschaften oder Relationen dieser Gegenstände usw. Wir müssen durch Beobachtungen (im weitesten Sinn) feststellen, wie die Fakten sind, und das Ergebnis vergleichen mit dem, was der Satz über diese Fakten aussagt. Wenn die Fakten so sind, wie der Satz es besagt, so ist er wahr; andernfalls falsch.

Das Wort „logisch" im üblichen Gebrauch der Philosophen ist sehr vage und vieldeutig. Wir wollen hier nicht versuchen, eine allgemeine und exakte Definition dafür zu geben. Es wird jedoch zur Klarheit beitragen, wenn wir wenigstens einige Fälle angeben (in nicht-technischer Sprache, ohne Anspruch auf Exaktheit), in denen wir den Term ‚logisch' verwenden wollen. Diese Verwendungsweisen scheinen mit dem üblichen Sprachgebrauch hinreichend übereinzustimmen (vollständige Übereinstimmung kann bei dem verwirrten Zustand des üblichen Gebrauchs natürlich nicht verlangt werden). Wenn ein Verfahren sich allein auf den ersten Schritt, die Sinnanalyse, gründet, ohne den zweiten Schritt, Beobachtungen von Fakten, zu benötigen, so wollen wir es als logisch bezeichnen; wenn es den zweiten Schritt benötigt, so nennen wir es nicht-logisch, synthetisch, empirisch. Die Sinnanalyse selbst bezeichnen wir daher auch als „logische Analyse". Ebenso nennen wir alle Begriffe, deren Vorliegen auf Grund des ersten Schrittes allein feststellbar ist, logische Begriffe; solche, die auf Beobachtungen beruhen, nennen wir nicht-logisch (deskriptiv, faktisch). Ferner nennen wir ein Ergebnis oder eine Aussage logisch, wenn sie auf Sinnanalyse allein basiert ist; ebenso eine Frage, deren Beantwortung durch Sinnanalyse geschieht.

Wir wollen nun einige Begriffe einführen, die in dem angegebenen Sinn logisch sind. Wir nennen sie L-Begriffe und bilden Terme für sie mit dem Präfix ‚L-'.

Wir teilen alle Zeichen unserer symbolischen Sprache in zwei Klassen ein, die Konstanten und die Variablen. Jede Konstante hat eine bestimmte, feste Bedeutung. Die Variablen dagegen dienen zum Hinweis auf unbestimmte Gegenstände, Eigenschaften usw.; sie werden in späteren Paragraphen erklärt werden. Ferner teilen wir alle Zeichen in logische und deskriptive (oder nicht-logische) ein. Die deskriptiven Zeichen sind diejenigen Konstanten, die zum Hinweis auf Gegenstände, Eigenschaften, Relationen usw. in der Welt dienen. Dazu gehören somit die Individualkonstanten, die Prädikate und die Satzkonstanten. Zu den logischen Zeichen gehören alle Variablen und die logischen Konstanten. Sie weisen nicht selbst auf etwas in der Welt hin (in der Welt der Dinge

gibt es nicht so etwas wie Negationen, Disjunktionen usw.). Sie verbinden die deskriptiven Konstanten eines Satzes und tragen damit indirekt zum Sinn des Satzes bei. Zu den logischen Konstanten gehören die Verknüpfungszeichen (und solche Hilfszeichen wie Klammern, Kommas usw.). Einen zusammengesetzten Ausdruck nennen wir deskriptiv, wenn er mindestens ein deskriptives Zeichen enthält, und andernfalls logisch. Ein logischer Ausdruck ist also ein solcher, der nur logische Zeichen enthält.

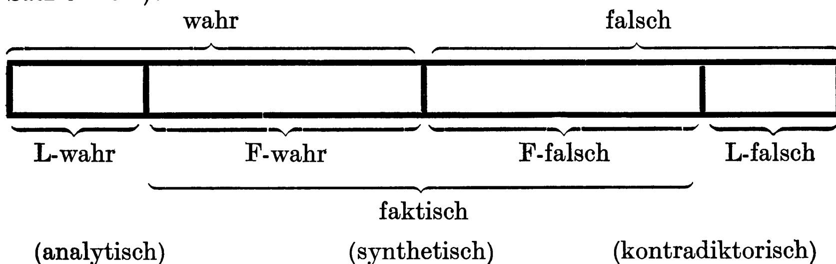
Wir wollen nun die Begriffe der Bewertung und des Spielraums verallgemeinern. Wir rechnen zu den *bewertbaren Zeichen* alle deskriptiven Konstanten und gewisse Variable. Wir haben vorhin als mögliche Werte für die Satzkonstanten die beiden Wahrheitswerte W und F genommen. Später werden wir festsetzen, welche andern Zeichen als bewertbar gelten sollen und was als mögliche Werte für bewertbare Zeichen anderer Arten genommen werden soll. Wir wollen die folgenden Erklärungen so allgemein fassen, daß sie nicht nur auf Sätze anwendbar sind, sondern allgemeiner auf *Satzformeln*; das sind Sätze oder satzartige Ausdrücke anderer Arten, die später erklärt werden. Unter einer *Bewertung* für eine gegebene Satzformel $\mathfrak{S}_i$ verstehen wir eine Zuordnung von Werten zu allen bewertbaren Zeichen, die in $\mathfrak{S}_i$ vorkommen. Wenn ein Zeichen in $\mathfrak{S}_i$ mehrmals vorkommt, so muß ihm an allen Stellen derselbe Wert zugeordnet werden. Unter der *Auswertung* einer Satzformel $\mathfrak{S}_i$ für eine bestimmte Bewertung verstehen wir die Feststellung des Wahrheitswertes von $\mathfrak{S}_i$ für diese Bewertung. Wenn $\mathfrak{S}_i$ aus Satzkonstanten und Verknüpfungszeichen besteht, so geschieht die Auswertung mit Hilfe der Wahrheitstafeln. Für andere Formen von Satzformeln werden wir später weitere Auswertungsregeln aufstellen. In Analogie zu der früheren Erklärung wollen wir unter dem *Spielraum* von $\mathfrak{S}_i$ die Klasse derjenigen Bewertungen verstehen, bei denen $\mathfrak{S}_i$ wahr ist. Die Klasse aller möglichen Bewertungen für $\mathfrak{S}_i$ (oder für gegebene bewertbare Zeichen, zu denen die in $\mathfrak{S}_i$ vorkommenden gehören) nennen wir den *totalen Spielraum*, die leere Klasse der Bewertungen nennen wir den *leeren Spielraum*.

Es wird zuweilen gesagt, ein Satz (oder eine Proposition oder ein Urteil) sei logisch wahr oder logisch notwendig oder analytisch, wenn er „aus rein logischen Gründen" wahr ist, oder wenn seine Wahrheit unabhängig ist von der zufälligen Beschaffenheit der Fakten, oder wenn er in allen möglichen Welten gilt (LEIBNIZ). Es scheint plausibel, diesen ungenauen Begriff in folgender Weise zu explizieren, d. h. exakt zu erfassen (s. die Bemerkung über Explikation am Ende von **1a**). Wir wollen einen Satz *L-wahr* nennen, wenn er den totalen Spielraum hat, wenn er also in jedem möglichen Fall wahr ist. Offenbar ist jeder tautologische Satz L-wahr; wir werden aber später viele L-wahre Sätze finden, die nicht tautologisch sind (**14**). Jeder L-wahre Satz ist wahr; denn, da er in jedem möglichen Fall gilt, so auch in dem wirklich vorliegenden Fall. Die Wahrheit eines L-wahren Satzes ist aber nicht von den Fakten abhängig, da er bei jeder möglichen Beschaffenheit der Fakten wahr sein

würde. Daher ist es für den Nachweis der Wahrheit eines L-wahren Satzes nicht nötig, Beobachtungen anzustellen; die logische Analyse des Satzes genügt, nämlich die Untersuchung aller möglichen Bewertungen auf Grund der Auswertungsregeln. Daher ist L-Wahrheit ein logischer Begriff in dem vorhin erklärten Sinn. Dasselbe gilt auch für die weiteren L-Begriffe. Die Begriffe der Wahrheit und Falschheit wollen wir nur auf Sätze anwenden, nicht auf andere Satzformeln (für die nur die relativen Begriffe „wahr (bzw. falsch) in bezug auf die und die Bewertung“ anwendbar sind). Die L-Begriffe dagegen wollen wir allgemein für Satzformeln definieren, auf Grund der verallgemeinerten Begriffe von Bewertung und Spielraum. In Analogie zu der soeben angestellten Überlegung für Sätze wollen wir eine Satzformel L-wahr nennen, wenn sie den totalen Spielraum hat, also für jede Bewertung wahr ist.

Wir nennen eine Formel L-falsch (oder logisch falsch oder kontradiktorisch), wenn sie den leeren Spielraum hat, also bei jeder möglichen Bewertung falsch ist. Offenbar ist jeder L-falsche Satz falsch. Seine Falschheit ist, unabhängig von den Fakten, schon durch den Sinn des Satzes gegeben.

Wenn eine Satzformel entweder L-wahr oder L-falsch ist, so nennen wir sie L-determiniert; andernfalls, also wenn sie weder L-wahr noch L-falsch ist, nennen wir sie L-indeterminiert. Eine Satzformel ist L-indeterminiert, wenn ihr Spielraum weder total noch leer ist, also wenn es mindestens eine Bewertung gibt, bei der sie wahr ist, und mindestens eine, bei der sie falsch ist. Einen L-indeterminierten Satz (aber nicht eine offene Satzformel) nennen wir auch faktisch. Dieser Begriff ist als Explikat für den traditionellen Begriff des synthetischen Urteils gemeint. Um den Wahrheitswert eines faktischen Satzes zu bestimmen, genügt logische Analyse nicht; es ist nötig, Fakten zu beobachten, um festzustellen, ob einer derjenigen Fälle vorliegt, in denen der Satz wahr sein würde, oder einer von denen, in denen er falsch sein würde. Beispiele für faktische Sätze: ‚*Kug* (*mond*)‘, ‚$\sim$ *Kug* (*mond*)‘, ‚*Stud* (*a*) **v** *Bru* (*a*, *b*)‘. Wenn ein faktischer Satz wahr ist, so nennen wir ihn F-wahr (oder faktisch wahr); wenn er falsch ist, F-falsch (oder faktisch falsch). Somit ergibt sich folgende Einteilung der Sätze (sie gilt nicht für offene Satzformeln):



Die folgenden Lehrsätze ergeben sich aus den Definitionen der L-Begriffe und den Wahrheitstafeln I und II. Wir bezeichnen Lehrsätze mit

‚L' und einer Doppelnummer; die erste Nummer bezeichnet den Paragraphen und wird bei Verweisungen innerhalb desselben Paragraphen weggelassen (wenn z. B. im Text von 5 „L1c" vorkommt, so bedeutet es soviel wie „L5—1c"). Definitionen werden zuweilen mit ‚D' und Doppelnummer bezeichnet. Die wichtigsten Lehrsätze, Definitionen usw. werden durch vorangestelltes ‚+' gekennzeichnet.

+L5—1. Spielräume. **a.** $\mathfrak{S}_i$ sei eine beliebige Satzformel, $\sim \mathfrak{S}_i$ ihre Negation. Der Spielraum von $\sim \mathfrak{S}_i$ ist das Negat des Spielraumes von $\mathfrak{S}_i$, d. h., die Klasse der Fälle, die nicht zum Spielraum von $\mathfrak{S}_i$ gehören.

b. Der Spielraum der Disjunktion zweier oder mehrerer Satzformeln ist die Vereinigung der Spielräume der einzelnen Satzformeln. (Die Vereinigung mehrerer Klassen ist die Klasse aller Elemente, die zu mindestens einer der Klassen gehören.)

c. Der Spielraum der Konjunktion zweier oder mehrerer Satzformeln ist der Durchschnitt der Spielräume der einzelnen Satzformeln. (Der Durchschnitt mehrerer Klassen ist die Klasse der Elemente, die zu jeder der Klassen gehören.)

L5—2. a. $\mathfrak{S}_i$ ist dann und nur dann L-falsch, wenn $\sim \mathfrak{S}_i$ L-wahr ist. $\sim \mathfrak{S}_i$ ist dann und nur dann L-falsch, wenn $\mathfrak{S}_i$ L-wahr ist. (Aus L1a.)

b. Eine Disjunktion zweier oder mehrerer Satzformeln ist dann und nur dann L-falsch, wenn alle Disjunktionsglieder L-falsch sind. (Aus L1b.)

c. Eine Konjunktion zweier oder mehrerer Satzformeln ist dann und nur dann L-wahr, wenn alle Konjunktionsglieder L-wahr sind. (Aus L1c.)

6. L-Implikation und L-Äquivalenz

6a. L-Implikation und L-Äquivalenz. In diesem Paragraphen werden wir zwei weitere L-Begriffe einführen, nämlich die logischen Relationen der L-Implikation und der L-Äquivalenz. Wir betrachten zunächst ein Beispiel auf Grund von Wahrheitstafel I. Der Spielraum des Satzes ‚A' besteht aus den beiden ersten Fällen, der Spielraum von ‚$A \vee B$' aus den drei ersten Fällen. Also ist in jedem Fall, in dem ‚A' wahr ist — nämlich im ersten und im zweiten Fall —, auch ‚$A \vee B$' wahr. Wir können daher von ‚A' auf ‚$A \vee B$' schließen, ohne etwas über die Fakten zu wissen. Wir wollen nun diese Überlegung allgemein auf Satzformeln $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ anwenden. Wenn $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ derart sind, daß der Spielraum von $\mathfrak{S}_i$ in dem von $\mathfrak{S}_j$ enthalten ist, also so, daß bei jeder möglichen Bewertung (für die bewertbaren Zeichen in $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$), bei der $\mathfrak{S}_i$ wahr ist, auch $\mathfrak{S}_j$ wahr ist, so wollen wir sagen, daß $\mathfrak{S}_i$ $\mathfrak{S}_j$ L-impliziert. L-Implikation

ist unser Explikat (**1a**) für den traditionellen Begriff, der zuweilen „Implikation“ oder „logische Implikation“ genannt wird und für dessen Umkehrung die Terme „logische Folge“, „Deduzierbarkeit“ und ähnliche üblich sind. In unserem Beispiel wird ‚$A \vee B$‘ L-impliziert von ‚A‘.

+L6—1. a. Eine Satzformel, die von einer L-wahren Satzformel L-impliziert wird, ist selbst L-wahr.

b. Eine Satzformel, die von einer tautologischen Satzformel tautologisch (d. h. auf Grund der Wahrheitstafel) L-impliziert wird, ist selbst tautologisch.

c. Eine Satzformel, die eine L-falsche Satzformel L-impliziert, ist selbst L-falsch.

+L6—2. a. Eine L-wahre Satzformel wird von jeder Satzformel L-impliziert.

b. Eine L-falsche Satzformel L-impliziert jede Satzformel.

+L6—3. a. Jede Satzformel L-impliziert sich selbst.

b. Transitivität der L-Implikation. Wenn $\mathfrak{S}_i$ $\mathfrak{S}_j$ L-impliziert, und $\mathfrak{S}_j$ $\mathfrak{S}_k$ L-impliziert, so L-impliziert $\mathfrak{S}_i$ $\mathfrak{S}_k$.

Angenommen, zwei Satzformeln $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ seien so gebaut, daß ihre Implikation $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j$ L-wahr ist. Dann L-impliziert $\mathfrak{S}_i$ $\mathfrak{S}_j$. Denn es kann keine Bewertung geben, bei der $\mathfrak{S}_i$ wahr, $\mathfrak{S}_j$ aber falsch wäre, weil bei einer solchen Bewertung (gemäß Wahrheitstafel I (4) Zeile 2) die Satzformel $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j$ falsch wäre; dies aber ist unmöglich, da sie als L-wahr vorausgesetzt ist. Ferner gilt auch die Umkehrung. Angenommen, $\mathfrak{S}_i$ L-impliziert $\mathfrak{S}_j$. Dann ist die Satzformel $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j$ L-wahr. Denn andernfalls würde es eine Bewertung geben, bei der $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j$ falsch wäre, bei der also (nach I (4)) $\mathfrak{S}_i$ wahr und $\mathfrak{S}_j$ falsch wäre, im Widerspruch zu der Voraussetzung. Daher gilt:

+L6—4. $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ seien beliebige Satzformeln. $\mathfrak{S}_i$ L-impliziert $\mathfrak{S}_j$ dann und nur dann, wenn die Implikation $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j$ L-wahr ist.

Beispiel. Betrachten wir die Sätze ‚A‘ und ‚$A \vee B$‘ unseres früheren Beispiels als $\mathfrak{S}_i$ bzw. $\mathfrak{S}_j$. Der Spielraum von ‚A‘ ist in dem von ‚$A \vee B$‘ enthalten, wie wir gesehen haben; d. h. es gibt keine Bewertung, bei der ‚A‘ wahr und ‚$A \vee B$‘ falsch wäre. Somit besteht einerseits L-Implikation; anderseits ist ‚$A \supset A \vee B$‘ bei jeder Bewertung wahr, also L-wahr. Denn eine Implikation ist nur falsch für die Wahrheitswerte WF, die hier nicht vorkommen.

L6—5. a. Eine Satzformel, die sowohl $\mathfrak{S}_i$ wie $\sim \mathfrak{S}_i$ L-impliziert, ist L-falsch. (Aus L5—1a.)

b. Eine Satzformel, die ihre eigene Negation L-impliziert, ist L-falsch. (Aus (a) und L3a.)

Wir nennen $\mathfrak{S}_i$ L-äquivalent (oder logisch äquivalent) mit $\mathfrak{S}_j$, wenn beide denselben Spielraum haben.

+**L6—6. a.** Zwei Satzformeln sind dann und nur dann L-äquivalent miteinander, wenn jede die andere L-impliziert.

b. Zwei Satzformeln sind dann und nur dann L-äquivalent, wenn bei jeder Bewertung entweder beide wahr oder beide falsch sind.

+**L6—7.** Zwei Satzformeln $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ sind dann und nur dann L-äquivalent, wenn $\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j$ L-wahr ist.

Beweis. 1. $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ seien L-äquivalent. Dann haben sie denselben Spielraum. Also sind bei jeder möglichen Bewertung entweder beide wahr oder beide falsch. Daher ist (nach Wahrheitstafel I (5)) $\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j$ bei jeder Bewertung wahr, also L-wahr. — 2. $\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j$ sei L-wahr, also bei jeder Bewertung wahr. Dann gibt es keine Bewertung, bei der $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ verschiedene Wahrheitswerte haben. Daher haben sie denselben Spielraum und sind L-äquivalent.

6b. Gehalt. Ein Satz besagt dadurch etwas über die Welt, daß er bestimmte Fälle, die an sich möglich wären, ausschließt, d. h., daß er uns mitteilt, daß die Wirklichkeit nicht zu den ausgeschlossenen Fällen gehört. Je mehr Fälle ein Satz ausschließt, um so mehr besagt er. Daher erscheint es als plausibel, den Gehalt eines Satzes zu definieren als die Klasse der möglichen Fälle, in denen er nicht gilt, also derer, die nicht zu seinem Spielraum gehören. (Wir werden von dem Begriff des Gehaltes weiterhin nicht viel Gebrauch machen.) Der wesentliche Charakter der logischen Deduktion, d. h. des Schlusses von einem Satz $\mathfrak{S}_i$ auf einen L-implizierten Satz $\mathfrak{S}_j$ besteht darin, daß der Gehalt von $\mathfrak{S}_j$ in dem von $\mathfrak{S}_i$ enthalten ist (da der Spielraum von $\mathfrak{S}_i$ in dem von $\mathfrak{S}_j$ enthalten ist). Logische Deduktion kann somit niemals zu neuer Erkenntnis über die Welt führen. Bei jeder Deduktion wird der Spielraum entweder vergrößert oder er bleibt gleich. Daher wird der Gehalt entweder verkleinert oder er bleibt gleich. Durch ein rein logisches Verfahren kann niemals Gehalt gewonnen werden.

Um faktische Erkenntnis zu gewinnen, ist somit stets ein nichtlogisches Verfahren nötig. Das sehen wir auch, wenn wir diejenigen Sätze betrachten, deren Wahrheit die Logik feststellen kann, also die L-wahren. Ein L-wahrer Satz schließt keine Möglichkeit aus. Sein Gehalt ist daher leer.

Wenn die Logik auch nicht zu etwas führen kann, das neu ist im logischen Sinn, so doch zu etwas, das neu ist im psychologischen Sinn. Infolge der Beschränkung der psychologischen Fähigkeiten des Menschen ist die Auffindung einer L-Implikationsbeziehung oder eines L-wahren Satzes oft eine wichtige Erkenntnis. Aber es ist keine faktische Erkenntnis, keine Mitteilung über die Welt, sondern ein Klarwerden über logische Zusammenhänge zwischen Begriffen, d. h. Zusammenhänge zwischen Bedeutungen. Angenommen, jemand weiß zunächst $\mathfrak{S}_i$ und findet dann durch mühsame logische Arbeit, daß $\mathfrak{S}_j$ von $\mathfrak{S}_i$ L-impliziert wird und daher auch als gewußt behauptet werden kann. Dann ist $\mathfrak{S}_j$ logisch nicht neu; es war seinem Gehalt nach schon in $\mathfrak{S}_i$ enthalten, wenn auch

verhüllt. Das logische Verfahren enthüllt es, macht es uns bewußt, und ermöglicht uns daher, unsere praktischen Handlungen darauf zu basieren. Zwei L-äquivalente Sätze haben denselben Spielraum und daher auch denselben Gehalt. Sie sind nur verschiedene Formulierungen für diesen gemeinsamen logischen Gehalt. Der psychologische Gehalt, d. h. die Gesamtheit der mit den Sätzen verbundenen Assoziationen, mag aber ganz verschieden sein.

6c. Klassen von Sätzen. Wir wollen die Begriffe, die wir bisher auf Sätze angewendet haben, nun auch auf Klassen von Sätzen und anderen Satzformeln anwenden. Wir fassen eine Klasse von Sätzen konjunktiv auf; d. h., sie soll genau das besagen, was alle zu ihr gehörenden Sätze zusammen besagen. Daher nennen wir eine Klasse von Sätzen dann und nur dann wahr, wenn jeder ihrer Sätze wahr ist. Andernfalls nennen wir sie falsch, also dann, wenn mindestens einer ihrer Sätze falsch ist. Unter dem Spielraum einer Klasse von Satzformeln verstehen wir die Klasse der möglichen Bewertungen (für die bewertbaren Zeichen aller Satzformeln der Klasse), bei denen die Klasse wahr ist, also derjenigen Bewertungen, bei denen alle Satzformeln der Klasse wahr sind. Die Definitionen der L-Begriffe mit Hilfe der Spielräume bleiben ungeändert. Auf Grund davon ergeben sich die folgenden Lehrsätze:

L6—8. Der Spielraum einer Klasse von Satzformeln ist der Durchschnitt der Spielräume der einzelnen Satzformeln.

Daraus folgt mit L5—1c:

+**L6—9.** Eine Konjunktion von zwei oder mehreren Satzformeln ist L-äquivalent mit der Klasse dieser Satzformeln.

L6—10. Eine Klasse von Satzformeln L-impliziert jede ihrer Satzformeln und jede ihrer Teilklassen.

L6—11. Eine Klasse von Satzformeln ist dann und nur dann L-wahr, wenn jede ihrer Satzformeln L-wahr ist.

L6—12. **a.** Eine Satzformel L-impliziert eine Klasse von Satzformeln dann und nur dann, wenn sie jede Satzformel dieser Klasse L-impliziert.

b. Eine Klasse von Satzformeln L-impliziert eine zweite dann und nur dann, wenn sie jede Satzformel der zweiten Klasse L-impliziert.

c. Eine Satzformel oder eine Klasse von Satzformeln L-impliziert eine Konjunktion zweier oder mehrerer Glieder dann und nur dann, wenn sie jedes der Glieder L-impliziert.

L6—13. Eine Klasse von Satzformeln, die zugleich eine Satzformel und ihre Negation enthält, ist L-falsch.

Wenn wir sagen, daß gewisse Satzformeln eine andere Satzformel L-implizieren oder dergleichen, so ist damit gemeint, daß die Klasse dieser Satzformeln die betreffende Satzformel L-impliziert usw.

L6—14. a. Die Klasse der Satzformeln $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j$ L-impliziert $\mathfrak{S}_j$. (Aus Wahrheitstafel I (4).)

b. Wenn $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j$ L-wahr sind, so ist auch $\mathfrak{S}_j$ L-wahr. (Aus (a).)

L6—15. Die Klasse der Satzformeln $\mathfrak{S}_i$ und $\sim \mathfrak{S}_i$, und ebenso die Konjunktion $\mathfrak{S}_i \,.\sim \mathfrak{S}_i$, L-impliziert jede Satzformel. (Aus L13 und L2b.)

Dieses Ergebnis ist wichtig für die Behandlung von deduktiven Systemen, z. B. Axiomensystemen. Wenn in einem solchen System zwei entgegengesetzte Sätze ableitbar sind, so wird das ganze System trivial, da jeder beliebige Satz ableitbar ist.

6d. Beispiele. 1. Der Spielraum von ‚A' (in bezug auf ‚A' und ‚B', in Wahrheitstafel I) besteht aus der ersten und zweiten Bewertung, der von ‚B' aus der ersten und dritten, also der gemeinsame Spielraum von ‚A' und ‚B' aus der ersten allein. Daher L-impliziert die Klasse der Sätze ‚A' und ‚B' jeden der folgenden Sätze: a) ‚$A \,.\, B$', b) ‚$A \vee B$', c) ‚$A \supset B$', d) ‚$A \equiv B$'. — 2. Der gemeinsame Spielraum von ‚A' und ‚$A \supset B$' besteht aus der ersten Bewertung allein, der von ‚B' aus der ersten und dritten. Also wird ‚B' L-impliziert von ‚A' und ‚$A \supset B$' (s. L14a).

Übungen. 1. Man stelle die Wahrheitstafel für den Satz ‚$(A \supset \sim A) \supset \sim A$' auf und zeige, daß er tautologisch ist. — 2. Ebenso für ‚$(A \,.\, B \supset C) \supset (A \,.\sim C \supset \sim B)$'. — 3. Man stelle eine Wahrheitstafel für die drei Argumente ‚A', ‚B' und ‚C' auf und stelle den Spielraum der Klasse der drei Sätze ‚$A \,.\, B \supset C$', ‚A' und ‚$\sim C$' fest. Man zeige, daß diese Klasse ‚$\sim B$' L-impliziert. — 4. Ebenso zeige man mit einer Tafel für vier Argumente, daß sowohl ‚A' als auch ‚$\sim C$' von der Klasse der folgenden drei Sätze L-impliziert wird: ‚$(A \supset B \,.\, C) \equiv D$', ‚$B$', ‚$\sim D$'.

7. Satzvariable

7a. Variable und Satzformeln. In der Mathematik sind Variable seit Jahrhunderten mit großem Vorteil verwendet worden, um Relationen zwischen Zahlen in kurzer und exakter Weise darzustellen. So drückt z. B. die Formel ‚$x^2 = 3\,y + 4$' mit den Zahlvariablen ‚x' und ‚y' eine Relation aus, die für gewisse Zahlenpaare gilt und für andere nicht. Und die Formel ‚$x + y = y + x$' drückt eine universelle Relation aus, d. h. eine solche, die für alle Paare von Zahlen gilt; es ist eine universelle oder allgemeingültige Formel (oft „arithmetisches Gesetz" oder „Identität" genannt). Ausdrücke, deren Einsetzung für eine Variable in einer gegebenen Formel wiederum eine sinnvolle Formel (nicht notwendig einen wahren Satz) ergibt, heißen einsetzbare Ausdrücke für die Variable. Die Entitäten, auf die sich eine in einer Formel vorkommende Variable bezieht, heißen die Werte der Variablen. Die Werte der Variablen ‚x' und ‚y' in den obigen Formeln sind Zahlen (Zahlen einer bestimmten Art, z. B. natürliche Zahlen, je nach den Regeln des betreffenden Systems); Zahlausdrücke (z. B. ‚6' oder ‚6 + 2') sind einsetzbar; daher heißen diese Variablen Zahlvariable. In der Mathematik wurden ursprünglich nur Variable für Zahlen verwendet; später aber auch für Funktionen, Klassen, Operationen und dergleichen. Die symbolische Logik über-

nimmt von der mathematischen Sprache das nützliche Hilfsmittel der Variablen und wendet es in noch weiterem Umfang an. Hier werden als Werte von Variablen Entitäten aller möglichen Arten zugelassen, z. B. Dinge, Klassen, Eigenschaften, Relationen, Funktionen, Propositionen usw. (Später werden wir einen Unterschied zwischen Wertextensionen und Wertintensionen machen, s. **10b**.)

In unserem symbolischen Sprachsystem werden wir später Individualvariable ‚*x*', ‚*y*', usw. verwenden, für die Individualkonstanten wie ‚*a*', ‚*b*' usw. einsetzbar sind, und Prädikatvariable ‚*F*', ‚*G*' usw., für die Prädikate wie ‚*P*', ‚*Q*' usw. einsetzbar sind. Unter einer Satzformel verstehen wir einen Ausdruck, der entweder ein Satz ist oder Variable enthält und durch geeignete Einsetzungen für diese Variablen in einen Satz übergeht. So ist z. B. ‚*Pa*' ein Satz und daher eine Satzformel; ferner sind ‚*Px*', ‚*Fa*' und ‚*Fx*' Satzformeln, da sie durch geeignete Einsetzungen in ‚*Pa*' übergehen. Später werden wir auch Formeln anderer Arten kennenlernen, z. B. Zahlformeln (d. h. Ausdrücke, die Zahlen bezeichnen, z. B. ‚$6 + 3$', oder durch geeignete Einsetzungen in solche Ausdrücke übergehen, z. B. ‚$x + 3$') und Formeln für Eigenschaften, Relationen, Funktionen und dergleichen. Da wir aber vorläufig nur mit Satzformeln zu tun haben, schreiben wir häufig einfach „Formel" anstatt „Satzformel". Wir verwenden ‚$\mathfrak{S}$' allgemein für Satzformeln.

7b. Satzvariable. Wir führen jetzt als erste Art von Variablen unseres Sprachsystems die Satzvariablen (oder Propositionsvariablen) ‚*p*', ‚*q*', ‚*r*' usw. ein. Wir bestimmen, daß beliebige Satzformeln unserer Sprache für sie einsetzbar sind. Eine Einsetzung für eine Satzvariable in einer gegebenen Satzformel ist stets so vorzunehmen, daß an allen Stellen, an denen die Satzvariable in der Formel vorkommt, derselbe Ausdruck für sie eingesetzt wird. Z. B. muß in ‚$p \vee q \supset q \vee p$' für ‚*p*' beide Male dieselbe Formel eingesetzt werden; ebenso muß für ‚*q*' beide Male dieselbe Formel eingesetzt werden (sie muß nicht notwendig verschieden sein von der für ‚*p*' eingesetzten). Wenn eine Satzformel mindestens eine Variable enthält (später werden wir genauer sagen: eine freie Variable, **9a**), so heißt sie offen, andernfalls geschlossen. Die geschlossenen Satzformeln sind die Sätze. (In andern Sprachsystemen werden zuweilen auch offene Satzformeln als Sätze zugelassen.) Wenn $\mathfrak{S}_i$ eine offene Satzformel ist, so heißt jede geschlossene Satzformel, die aus $\mathfrak{S}_i$ durch Einsetzungen gebildet werden kann, eine Einsetzungsinstanz (oder kurz: eine Instanz) von $\mathfrak{S}_i$; wenn $\mathfrak{S}_i$ eine geschlossene Satzformel ist, so betrachten wir $\mathfrak{S}_i$ selbst als die einzige Einsetzungsinstanz.

Wir nennen $\mathfrak{S}_i'$, $\mathfrak{S}_j'$ usw. entsprechende Einsetzungsinstanzen von $\mathfrak{S}_i$, $\mathfrak{S}_j$ usw., wenn $\mathfrak{S}_i'$ aus $\mathfrak{S}_i$, $\mathfrak{S}_j'$ aus $\mathfrak{S}_j$ usw. durch dieselben Einsetzungen gebildet worden sind (d. h. für jede Satzvariable ist an allen Stellen, an denen sie in $\mathfrak{S}_i$, $\mathfrak{S}_j$ usw. vorkommt, derselbe Ausdruck eingesetzt worden).

Individualkonstanten und Individualvariable heißen Individualzeichen. Eine Satzformel, die aus einem *n*-stelligen Prädikat und *n*

Individualzeichen besteht, heißt eine Vollformel des Prädikates; falls sie keine Individualvariable enthält, so heißt sie ein Vollsatz des Prädikates. Satzkonstanten und Satzvariable heißen Satzzeichen. Eine Satzformel, die entweder ein Satzzeichen oder eine Vollformel eines Prädikates ist, heißt eine Atomformel; falls sie ein Satz ist, heißt sie ein Atomsatz. Eine Satzformel heißt eine molekulare Verknüpfung anderer Formeln, wenn sie aus diesen anderen Formeln mit Hilfe der früher genannten Verknüpfungszeichen aufgebaut ist. Eine Satzformel, die entweder eine Atomformel oder eine molekulare Verknüpfung von solchen ist, heißt eine molekulare Satzformel; wenn sie ein Satz ist, heißt sie ein molekularer Satz. Wir sagen, daß $\mathfrak{S}_i$ in $\mathfrak{S}_j$ molekular vorkommt, wenn $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ Satzformeln sind, derart, daß $\mathfrak{S}_j$ eine molekulare Verknüpfung von $\mathfrak{S}_i$ und möglicherweise anderen Formeln ist, die $\mathfrak{S}_i$ nicht als Teil enthalten. [Beispiel. ‚Px' kommt molekular vor in ‚$A \lor Px$', aber nicht in ‚$A \lor (x)(Px)$'.]

Die Satzvariablen gehören auch zu den bewertbaren Zeichen. Mögliche Werte für sie sind, wie für die Satzkonstanten, die Wahrheitswerte W und F. $\mathfrak{S}_i$ sei ein molekularer Satz mit n verschiedenen Satzkonstanten. Die offene Satzformel $\mathfrak{S}_j$ sei aus $\mathfrak{S}_i$ gebildet, indem die Satzkonstanten durch n verschiedene Satzvariable ersetzt werden. Wenn nun $\mathfrak{S}_i$ bei einer gegebenen Bewertung für die Satzkonstanten wahr ist, so ist offenbar $\mathfrak{S}_j$ bei der entsprechenden Bewertung für die Satzvariablen wahr. Die Wahrheitstafeln können offenbar auch unmittelbar auf Satzvariable als Glieder einer molekularen Formel angewendet werden. Wenn $\mathfrak{S}_i$ L-wahr ist, so offenbar auch $\mathfrak{S}_j$. So ist z. B., da ‚$A \lor \sim A$' nach Wahrheitstafel III (3) L-wahr ist, auch ‚$p \lor \sim p$' L-wahr; und dieses Ergebnis ist unmittelbar ersichtlich aus einer Wahrheitstafel analog zu der genannten, aber mit ‚p' anstatt ‚A'.

+**L7—1.** Einsetzungen. $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ seien beliebige Satzformeln. $\mathfrak{S}_i'$ und $\mathfrak{S}_j'$ seien aus $\mathfrak{S}_i$ bzw. $\mathfrak{S}_j$ durch dieselben Einsetzungen für eine oder mehrere (nicht notwendig alle) der vorkommenden Satzvariablen gebildet. Dann gilt Folgendes:

a. Wenn $\mathfrak{S}_i$ L-wahr ist, so auch $\mathfrak{S}_i'$.

Beweis. $\mathfrak{S}_i$ sei L-wahr, also wahr bei jeder Bewertung der vorkommenden bewertbaren Zeichen. $\mathfrak{S}_i'$ sei aus $\mathfrak{S}_i$ gebildet, indem für eine der vorkommenden Satzvariablen, etwa ‚p', die Satzformel $\mathfrak{S}_k$ eingesetzt wird. Die bewertbaren Zeichen in $\mathfrak{S}_k$ gehören jetzt zu den bewertbaren Zeichen in $\mathfrak{S}_i'$. Eine beliebige Bewertung für die bewertbaren Zeichen in $\mathfrak{S}_i'$ sei gegeben. Die Auswertung von $\mathfrak{S}_k$ führt dann entweder auf W oder auf F. Da nun $\mathfrak{S}_i$ bei jeder Bewertung wahr ist, gleichgültig, ob ‚p' den Wert W oder F erhält, so ist $\mathfrak{S}_i'$ bei jeder Bewertung (einschließlich der neu hinzugekommenen bewertbaren Zeichen) wahr, gleichgültig, ob die Auswertung von $\mathfrak{S}_k$ auf W oder F führt. Also ist $\mathfrak{S}_i'$ L-wahr.

b. Wenn $\mathfrak{S}_i$ tautologisch ist, so auch $\mathfrak{S}_i'$. (Dies ist ein Spezialfall von (a).)

c. Wenn $\mathfrak{S}_i$ L-falsch ist, so auch $\mathfrak{S}_i'$. (Analog zu (a).)

d. Wenn $\mathfrak{S}_i'$ L-indeterminiert ist, so auch $\mathfrak{S}_i$. (Aus (a) und (c).)

e. Wenn $\mathfrak{S}_i$ $\mathfrak{S}_j$ L-impliziert, so auch $\mathfrak{S}_i'$ $\mathfrak{S}_j'$. (Aus (a) und L6—4.)

f. Wenn $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ L-äquivalent sind, so auch $\mathfrak{S}_i'$ und $\mathfrak{S}_j'$. (Aus (a) und L6—7.)

Beispiele für L1b. Die Formel ‚$p \vee q \supset q \vee p$' ist tautologisch. Daher sind auch die Formeln ‚$p \vee A \supset A \vee p$' und ‚$(p \,.\, r) \vee (A \,.\, \sim p) \supset (A \,.\, \sim p) \vee (p \,.\, r)$' tautologisch.

8. Tautologische Satzformeln

8a. Tautologische Implikationsformeln. In den folgenden Lehrsätzen geben wir Listen von tautologischen Satzformeln. Für jede dieser Formeln kann ihr tautologischer Charakter durch eine Wahrheitstafel gezeigt werden, in der anstatt der früher verwendeten Glieder ‚A', ‚B' usw. Satzvariable ‚p', ‚q' usw. genommen werden. Die Listen sollen hauptsächlich zum Nachschlagen dienen. Beim ersten Lesen dieses Buches genügt es, die wichtigeren Formeln zu beachten, die mit ‚+' markiert sind.

L8—1. Die folgenden Formeln sind tautologisch und daher L-wahr:

+**a.** $p \vee \sim p$.
b. $\sim p \vee p$.
c. $\sim (p \,.\, \sim p)$.

L8—2. $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j$ sei irgend eine der unten aufgeführten Implikationsformeln a (1) bis i (2). $\mathfrak{S}_i' \supset \mathfrak{S}_j'$ sei aus ihr durch beliebige Einsetzungen gebildet. Dann gilt Folgendes:

A. $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j$ ist tautologisch und daher L-wahr.

B. $\mathfrak{S}_i' \supset \mathfrak{S}_j'$ ist tautologisch und daher L-wahr (nach L7—1b).

C. $\mathfrak{S}_i$ L-impliziert $\mathfrak{S}_j$ (nach L6—4).

D. $\mathfrak{S}_i'$ L-impliziert $\mathfrak{S}_j'$ (aus C, nach L7—1d).

E. Wenn $\mathfrak{S}_i$ eine Konjunktion ist, also die ganze Formel die Form $\mathfrak{S}_k \,.\, \mathfrak{S}_l \supset \mathfrak{S}_j$ hat, so wird $\mathfrak{S}_j$ L-impliziert von der Klasse der Formeln $\mathfrak{S}_k$ und $\mathfrak{S}_l$. Analoges gilt für Formeln, die aus diesen drei Formeln durch gleiche Einsetzungen gebildet sind.

a. + (1) $p \supset p \vee q$.
(2) $q \supset p \vee q$.
(3) $q \supset (p \supset q)$.
(4) $\sim p \supset (p \supset q)$.

b. + (1) $p \,.\, q \supset p$.
(2) $p \,.\, q \supset q$.

+ **c.** $p \,.\, \sim p \supset q$.

d. + (1) $(p \vee q) \,.\, \sim p \supset q$.
+ (2) $(p \vee q) \,.\, \sim q \supset p$.
+ (3) $(p \supset q) \,.\, p \supset q$.
(4) $p \supset [(p \supset q) \supset q]$.
(5) $(p \supset q) \,.\, \sim q \supset \sim p$.

e. + (1) $(p \equiv q) \supset (p \supset q)$.
+ (2) $(p \equiv q) \supset (q \supset p)$.
(3) $(p \equiv q) \supset (\sim p \supset \sim q)$.
(4) $(p \equiv q) \supset (\sim q \supset \sim p)$.
(5) $(p \equiv q) \,.\, p \supset q$.
(6) $(p \equiv q) \,.\, q \supset p$.
(7) $(p \equiv q) \,.\, \sim p \supset \sim q$.
(8) $(p \equiv q) \,.\, \sim q \supset \sim p$.

f. (1) $(p \supset q) \supset (p \vee r \supset q \vee r)$.
(2) $(p \supset q) \supset (p \,.\, r \supset q \,.\, r)$.
(3) $(p \supset q) \supset [(r \supset p) \supset (r \supset q)]$.
(4) $(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$.
(5) $(p \supset q) \,.\, (p \vee r) \supset q \vee r$.
+ (6) $(p \supset q) \,.\, (q \supset r) \supset (p \supset r)$.
(7) $(p \equiv q) \,.\, (p \equiv r) \supset (q \equiv r)$.
+ (8) $(p \equiv q) \,.\, (q \equiv r) \supset (p \equiv r)$.

g. (1) $(p \equiv q) \supset (p \vee r \equiv q \vee r)$.
(2) $(p \equiv q) \supset (p \,.\, r \equiv q \,.\, r)$.
(3) $(p \equiv q) \supset [(p \supset r) \equiv (q \supset r)]$.
(4) $(p \equiv q) \supset [(r \supset p) \equiv (r \supset q)]$.
(5) $(p \equiv q) \supset [(p \equiv r) \equiv (q \equiv r)]$.

h. (1) $(p \supset q) \,.\, (r \supset s) \supset (p \vee r \supset q \vee s)$.
(2) $(p \supset q) \,.\, (r \supset s) \,.\, (p \vee r) \supset q \vee s$.

i. (1) $q \supset (p \equiv p \,.\, q)$.
(2) $\sim q \supset (p \equiv p \vee q)$.

Für die Anwendung der in L2 genannten Implikationsformeln sind die Teilbehauptungen C und D besonders wichtig: das erste Glied (oder eine Einsetzungsinstanz davon) L-impliziert das zweite Glied (bzw. eine entsprechende Einsetzungsinstanz).

Also kann man in einer Deduktion (Ableitung) die letztere Formel aus der ersteren erschließen. So ersehen wir aus (a) (1) und (2), daß wir einer gegebenen Satzformel eine beliebige andere als Disjunktionsglied anfügen dürfen. (a) (3) und (4): eine Implikationsformel wird von ihrem zweiten Glied L-impliziert und auch von der Negation des ersten. Daher ist ein Implikationssatz wahr, wenn das zweite Glied wahr ist, und auch, wenn das erste falsch ist; das ersieht man auch aus der Wahrheitstafel I (4). (b) (1) und (2): eine Konjunktion L-impliziert jedes ihrer Glieder. (c): eine Satzformel und ihre Negation zusammen L-implizieren jede beliebige Satzformel (vgl. L6—15). (d) (1) und (2): eine Disjunktion und die Negation eines ihrer Glieder zusammen L-implizieren das andere Glied. (d) (3) erlaubt den wichtigen Schluß von einer Implikation zusammen mit ihrem ersten Glied auf das zweite (zuweilen modus ponens genannt; vgl. L6—14a). (d) (5) erlaubt den ähnlichen Schluß von einer Implikation zusammen mit der Negation des zweiten Gliedes auf die Negation des ersten (zuweilen modus tollens genannt). (e) (1) und (2): eine Äquivalenz L-impliziert die beiden Implikationen ihrer Glieder. (e) (5) und (6):

eine Äquivalenz zusammen mit einem ihrer Glieder L-impliziert das andere Glied. (e) (7) und (8): eine Äquivalenz zusammen mit der Negation eines ihrer Glieder L-impliziert die Negation des andern Gliedes. (f) (1) und (2): in einer gegebenen Implikation darf man zu beiden Gliedern dieselbe Formel als Disjunktionsglied oder als Konjunktionsglied anfügen; (f) (3) und (4): ebenso als erstes Implikationsglied, während bei Anfügung als zweites Glied die ursprünglichen Glieder ihre Stellen vertauschen müssen. (f) (6): die Implikation ist transitiv. (g) (1) bis (5): in einer gegebenen Äquivalenz darf man zu beiden Gliedern dieselbe Formel hinzufügen — entweder als Disjunktionsglied oder als Konjunktionsglied oder als erstes oder als zweites Implikationsglied oder als (erstes oder zweites) Äquivalenzglied. (i) (1): Zu einem gegebenen Satz kann nach Belieben ein wahrer Satz konjunktiv hinzugefügt werden, ohne den Wahrheitswert zu ändern; die konjunktive Hinzufügung eines L-wahren Satzes ändert den Gehalt nicht, d. h., das Ergebnis ist L-äquivalent zu dem ursprünglichen Satz. (i) (2) besagt Analoges für die disjunktive Anfügung eines falschen bzw. L-falschen Satzes.

8b. Ersetzbarkeit. Ein Ausdruck $\mathfrak{A}_i$ heißt ersetzbar durch einen Ausdruck $\mathfrak{A}_j$, wenn für beliebige Satzformeln $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ Folgendes gilt: wenn $\mathfrak{S}_i$ $\mathfrak{A}_i$ enthält und $\mathfrak{S}_j$ aus $\mathfrak{S}_i$ gebildet ist, indem $\mathfrak{A}_i$ an einer oder mehreren Stellen (nicht notwendig an allen Stellen, an denen es vorkommt) durch $\mathfrak{A}_j$ ersetzt wird, so ist $\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j$ wahr. $\mathfrak{A}_i$ heißt L-ersetzbar durch $\mathfrak{A}_j$, wenn unter den genannten Bedingungen $\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j$ stets L-wahr ist, also $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ stets L-äquivalent sind.

Der Wahrheitswert eines Satzes mit einem unserer Verknüpfungszeichen ist eindeutig bestimmt durch die Wahrheitswerte der Glieder, auf Grund der Wahrheitstafel für das Zeichen. (Man hat daher diese Verknüpfungen auch „Wahrheitsfunktionen“ genannt.) Daher ist auch der Wahrheitswert eines beliebig zusammengesetzten molekularen Satzes eindeutig bestimmt durch die Wahrheitswerte der vorkommenden Atomsätze. $\mathfrak{S}_i$ sei ein molekularer Satz, in dem $\mathfrak{S}_j$ als Teil vorkommt; $\mathfrak{S}_j$ mag ein Atomsatz oder ein zusammengesetzter molekularer Satz sein. Wenn nun $\mathfrak{S}_j$ in $\mathfrak{S}_i$ ersetzt wird durch einen beliebigen andern Satz $\mathfrak{S}_k$, der denselben Wahrheitswert hat wie $\mathfrak{S}_j$, so bleibt nach dem Gesagten der Wahrheitswert von $\mathfrak{S}_i$ ungeändert. Daraus ergibt sich: eine Satzformel wird in eine L-äquivalente übergeführt, wenn in ihr eine Teilformel durch eine beliebige L-äquivalente ersetzt wird. Dieses wichtige Ergebnis wird in den folgenden Lehrsätzen genauer nachgewiesen.

L8—3. ‚$..p..$‘ sei eine der folgenden Formeln: ‚$\sim p$‘, ‚$p \vee r$‘, ‚$r \vee p$‘, ‚$p \,.\, r$‘, ‚$r \,.\, p$‘, ‚$p \supset r$‘, ‚$r \supset p$‘, ‚$p \equiv r$‘, ‚$r \equiv p$‘. ‚$..q..$‘, ‚$..A..$‘ und ‚$..B..$‘ seien die entsprechenden Formeln mit ‚q‘ bzw. ‚A‘ bzw. ‚B‘ an Stelle von ‚p‘. Dann gilt Folgendes:

a. ‚$(p \equiv q) \supset [(..p..) \equiv (..q..)]$‘ ist L-wahr.
b. ‚$p \equiv q$‘ L-impliziert ‚$(..p..) \equiv (..q..)$‘.
c. ‚$(p \equiv q) \,.\, (..p..) \supset (..q..)$‘ ist L-wahr.
d. ‚$p \equiv q$‘ und ‚$..p..$‘ zusammen L-implizieren ‚$..q..$‘.

e. ‚$(A \equiv B) \supset [(\ldots A \ldots) \equiv (\ldots B \ldots)]$‘ ist L-wahr.
f. ‚$A \equiv B$‘ L-impliziert ‚$(\ldots A \ldots) \equiv (\ldots B \ldots)$‘.
g. ‚$(A \equiv B) \cdot (\ldots A \ldots) \supset (\ldots B \ldots)$‘ ist L-wahr.
h. ‚$A \equiv B$‘ und ‚$\ldots A \ldots$‘ zusammen L-implizieren ‚$\ldots B \ldots$‘.

Beweis. Wir führen den Beweis für die Formel ‚$p \lor r$‘; für die andern ist er analog. — (a). Aus L2g (1) oder aus der Wahrheitstafel. — (b). Aus (a) nach L6—4. — (c). ‚$(p \equiv q) \cdot (p \lor r) \supset q \lor r$‘ ist tautologisch. — (d). Aus (c) mit L6—4 und L6—9. — (e) bis (h) folgen aus (a) bis (d) nach L7—1.

[Es ist zu beachten, daß analoge Behauptungen zu (a) und (b), mit ‚$\supset$‘ anstatt ‚$\equiv$‘ an beiden Stellen, nicht allgemein gelten, sondern nur in gewissen Fällen, von denen einige in L2f (1), (2), (3) angegeben sind.]

L8—4. ‚$\ldots p \ldots$‘ sei eine molekulare Satzformel, die ‚p‘ enthält. ‚$\ldots q \ldots$‘, ‚$\ldots A \ldots$‘ und ‚$\ldots B \ldots$‘ seien aus ‚$\ldots p \ldots$‘ durch Einsetzung von ‚q‘, ‚A‘ bzw. ‚B‘ für ‚p‘ entstanden. Dann gelten die Behauptungen (a) bis (h) von L3.

Beweis. Der Beweis für (b) ergibt sich durch Anwendung von L3 zunächst auf die kleinsten Teilformeln in ‚$\ldots p \ldots$‘, die ‚p‘ als Glied enthalten, und dann schrittweise auf umfassendere Formeln, bis schließlich zur Formel ‚$\ldots p \ldots$‘ selbst. Dabei werden die folgenden tautologischen Formeln verwendet:

(α) $(p \equiv q) \supset [(r \equiv s) \supset (p \lor r \equiv q \lor s)]$.
(β) $(p \equiv q) \supset [(r \equiv s) \supset (p \cdot r \equiv q \cdot s)]$.
(γ) $(p \equiv q) \supset [(r \equiv s) \supset ((p \supset r) \equiv (q \supset s))]$.
(δ) $(p \equiv q) \supset [(r \equiv s) \supset ((p \equiv r) \equiv (q \equiv s))]$.

[Beispiel mit ‚$(r \cdot \sim p) \lor (p \cdot s)$‘ für ‚$\ldots p \ldots$‘. Aus L3b: (1) ‚$p \equiv q$‘ L-impliziert ‚$\sim p \equiv \sim q$‘; (2) ‚$p \equiv q$‘ L-impliziert ‚$r \cdot p \equiv r \cdot q$‘; hieraus durch Einsetzungen: (3) ‚$\sim p \equiv \sim q$‘ L-impliziert ‚$r \cdot \sim p \equiv r \cdot \sim q$‘. Aus (1) und (3) mit L6—3b: (4) ‚$p \equiv q$‘ L-impliziert ‚$r \cdot \sim p \equiv r \cdot \sim q$‘. Aus L3b: (5) ‚$p \equiv q$‘ L-impliziert ‚$p \cdot s \equiv q \cdot s$‘. Aus ($\alpha$) mit Einsetzungen: (6) ‚$r \cdot \sim p \equiv r \cdot \sim q$‘ und ‚$p \cdot s \equiv q \cdot s$‘ zusammen L-implizieren ‚$(r \cdot \sim p) \lor (p \cdot s) \equiv (r \cdot \sim q) \lor (q \cdot s)$‘. Hieraus mit (4) und (5): ‚$p \equiv q$‘ L-impliziert ‚$(r \cdot \sim p) \lor (p \cdot s) \equiv (r \cdot \sim q) \lor (q \cdot s)$‘.] Aus (b) ergibt sich (a) nach L6—4. Die andern Teile des Lehrsatzes folgen dann in Analogie zu L3.

+L8—5. $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ seien L-äquivalent. $\mathfrak{S}_i$ komme in $\mathfrak{S}_k$ ein- oder mehrmals vor, aber nur molekular. $\mathfrak{S}_l$ sei aus $\mathfrak{S}_k$ gebildet, indem $\mathfrak{S}_i$ an einer oder mehreren Stellen (nicht notwendig an allen Stellen, an denen es vorkommt) durch $\mathfrak{S}_j$ ersetzt wird. Dann sind $\mathfrak{S}_k$ und $\mathfrak{S}_l$ L-äquivalent.

Beweis. $\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j$ ist L-wahr. Diese Formel L-impliziert $\mathfrak{S}_k \equiv \mathfrak{S}_l$, (L4b); also ist auch letztere L-wahr (L6—1a). Daher sind $\mathfrak{S}_k$ und $\mathfrak{S}_l$ L-äquivalent (L6—7).

L5 besagt, daß L-äquivalente Satzformeln L-ersetzbar sind an Stellen, wo sie molekular vorkommen. Später werden wir einen allgemeineren Lehrsatz über L-Ersetzbarkeit finden, der L5 als Spezialfall enthält (L15—3).

8c. Tautologische Äquivalenzformeln.

L8—6. $\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j$ sei irgend eine der unten aufgeführten Äquivalenzformeln (a) bis (q) (5). $\mathfrak{S}_i' \equiv \mathfrak{S}_j'$ sei aus ihr durch beliebige Einsetzungen gebildet. Dann gilt Folgendes:

A. $\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j$ ist tautologisch und daher L-wahr.

B. $\mathfrak{S}_i' \equiv \mathfrak{S}_j'$ ist tautologisch und daher L-wahr. (Aus L7—1b.)

C. $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ sind L-äquivalent. (Aus (A) nach L6—7.)

D. $\mathfrak{S}_i'$ und $\mathfrak{S}_j'$ sind L-äquivalent. (Aus (B) nach L6—7.)

E. $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ sind gegenseitig L-ersetzbar in molekularen Verbindungen. (Aus (C) nach L5.)

F. $\mathfrak{S}_i'$ und $\mathfrak{S}_j'$ sind gegenseitig L-ersetzbar in molekularen Verbindungen. (Aus (D) nach L5.)

a. $p \equiv p$.
\+ **b.** $p \equiv \sim \sim p$.
c. $p \equiv p \vee p$.
d. $p \equiv p \,.\, p$.
e. Kommutationsgesetze.
\+ (1) $p \vee q \equiv q \vee p$.
\+ (2) $p \,.\, q \equiv q \,.\, p$.
\+ (3) $(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$.
f. + (1) $(p \equiv q) \equiv (p \supset q) \,.\, (q \supset p)$.
(2) $(p \equiv q) \equiv [(p \equiv r) \equiv (q \equiv r)]$.
(3) $(p \equiv q) \equiv (\sim p \vee q) \,.\, (p \vee \sim q)$.
(4) $(p \equiv q) \equiv (p \,.\, q) \vee (\sim p \,.\, \sim q)$.
g. Dualitätsgesetze.
\+ (1) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \,.\, \sim q$.
(2) $\sim (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \equiv \sim p_1 \,.\, \sim p_2 \,.\, \ldots \,.\, \sim p_n$.
\+ (3) $\sim (p \,.\, q) \equiv \sim p \vee \sim q$.
(4) $\sim (p_1 \,.\, p_2 \,.\, \ldots \,.\, p_n) \equiv \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \ldots \vee \sim p_n$.
(5) $p \vee q \equiv \sim (\sim p \,.\, \sim q)$.
(6) $p \,.\, q \equiv \sim (\sim p \vee \sim q)$.
h. Negationsgesetze.
\+ (1) $\sim (p \supset q) \equiv p \,.\, \sim q$.
(2) $\sim (p \,.\, \sim q) \equiv (p \supset q)$.
\+ (3) $\sim (p \equiv q) \equiv (p \equiv \sim q)$.
(4) $\sim (p \equiv q) \equiv (\sim p \equiv q)$.
(5) $\sim (p \equiv q) \equiv (p \supset \sim q) \,.\, (\sim q \supset p)$.
(6) $\sim (p \equiv q) \equiv (\sim p \supset q) \,.\, (q \supset \sim p)$.
(7) $\sim (p \equiv q) \equiv (p \,.\, \sim q) \vee (\sim p \,.\, q)$.
(8) $\sim (p \equiv q) \equiv (p \vee q) \,.\, (\sim p \vee \sim q)$.
i. Gesetze der Wendung (Transposition).
\+ (1) $(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$.
(2) $(\sim p \supset q) \equiv (\sim q \supset p)$.
(3) $(p \supset \sim q) \equiv (q \supset \sim p)$.
\+ (4) $(p \equiv q) \equiv (\sim p \equiv \sim q)$.
(5) $(p \equiv \sim q) \equiv (\sim p \equiv q)$.
(6) $(p \,.\, q \supset r) \equiv (p \,.\, \sim r \supset \sim q)$.
(7) $(p \supset q \vee r) \equiv (p \,.\, \sim q \supset r)$.
(8) $(p \supset \sim q \vee r) \equiv (p \,.\, q \supset r)$.

j. Umformungen der Implikation.

(1) $(p \supset q) \equiv \sim p \vee q$.
(2) $(p \supset q) \equiv (p \supset p \,.\, q)$.
(3) $(p \supset q) \equiv (p \equiv p \,.\, q)$.
(4) $(p \supset q) \equiv (p \vee q \supset q)$.
(5) $(p \supset q) \equiv (p \vee q \equiv q)$.

k. (1) $p \equiv (p \vee q) \,.\, (p \vee \sim q)$.
(2) $(p \equiv (p \,.\, q) \vee (p \,.\, \sim q)$.

l. (1) $(p \supset (q \supset r)) \equiv (p \,.\, q \supset r)$.
(2) $p \supset (q \supset r)) \equiv (q \supset (p \supset r))$.

m. Assoziationsgesetze.

+ (1) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$.
+ (2) $(p \,.\, q) \,.\, r \equiv p \,.\, (q \,.\, r)$.

n. Distributionsgesetze.

+ (1) $p \,.\, (q \vee r) \equiv (p \,.\, q) \vee (p \,.\, r)$.
(2) $p \,.\, (q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_n) \equiv (p \,.\, q_1) \vee (p \,.\, q_2) \vee \ldots \vee (p \,.\, q_n)$.
(3) $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_m) \,.\, (q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_n) \equiv (p_1 \,.\, q_1) \vee (p_1 \,.\, q_2) \vee \ldots \vee (p_1 \,.\, q_n) \vee (p_2 \,.\, q_1) \vee \ldots \vee (p_m \,.\, q_1) \vee (p_m \,.\, q_2) \vee \ldots \vee (p_m \,.\, q_n)$, wobei rechts Konjunktionen für alle Paare aus je einer p-Variablen und je einer q-Variablen auftreten.
+ (4) $p \vee (q \,.\, r) \equiv (p \vee q) \,.\, (p \vee r)$.
(5) $p \vee (q_1 \,.\, q_2 \,.\, \ldots \,.\, q_n) \equiv (p \vee q_1) \,.\, (p \vee q_2) \,.\, \ldots \,.\, (p \vee q_n)$.
(6) $(p_1 \,.\, p_2 \,.\, \ldots \,.\, p_m) \vee (q_1 \,.\, q_2 \,.\, \ldots \,.\, q_n) \equiv (p_1 \vee q_1) \,.\, (p_1 \vee q_2) \,.\, \ldots \,.\, (p_1 \vee q_n) \,.\, (p_2 \vee q_1) \,.\, \ldots \,.\, (p_m \vee q_1) \,.\, (p_m \vee q_2) \,.\, \ldots \,.\, (p_m \vee q_n)$, analog zu (3).
(7) $p \vee (q \equiv r) \equiv (p \vee q \equiv p \vee r)$.
(8) $(p \supset q \,.\, r) \equiv (p \supset q) \,.\, (p \supset r)$.
(9) $(p \supset q_1 \,.\, q_2 \,.\, \ldots \,.\, q_n) \equiv (p \supset q_1) \,.\, (p \supset q_2) \,.\, \ldots \,.\, (p \supset q_n)$.
(10) $(p \supset q \vee r) \equiv (p \supset q) \vee (p \supset r)$.
(11) $(p \supset q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_n) \equiv (p \supset q_1) \vee (p \supset q_2) \vee \ldots \vee (p \supset q_n)$.
(12) $p \supset (q \supset r) \equiv (p \supset q) \supset (p \supset r)$.
(13) $p \supset (q \equiv r) \equiv (p \supset q) \equiv (p \supset r)$.

o. (1) $(p \,.\, q \supset r) \equiv (p \supset r) \vee (q \supset r)$.
(2) $(p_1 \,.\, p_2 \,.\, \ldots \,.\, p_n \supset r) \equiv (p_1 \supset r) \vee (p_2 \supset r) \vee \ldots \vee (p_n \supset r)$.
(3) $(p \vee q \supset r) \equiv (p \supset r) \,.\, (q \supset r)$.
(4) $(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n \supset r) \equiv (p_1 \supset r) \,.\, (p_2 \supset r) \,.\, \ldots \,.\, (p_n \supset r)$.

p. $(p \supset (q \equiv r)) \equiv (p \,.\, q \equiv p \,.\, r)$.

q. (1) $p \equiv p \vee (p \,.\, q)$.

(2) $p \equiv p \,.\, (p \vee q)$.

(3) $p \vee q \equiv p \vee (q \,.\, \sim p)$.

(4) $p \,.\, q \equiv p \,.\, (q \vee \sim p)$.

(5) $p \,.\, q \equiv p \,.\, (p \supset q)$.

Für die Anwendung der in **L6** angeführten tautologischen Äquivalenzen ist besonders wichtig die L-Äquivalenz der beiden Glieder und die gegenseitige L-Ersetzbarkeit in molekularen Verbindungen. (b) erlaubt die Weglassung eines doppelten Negationszeichens. (e) (1) bis (3) erlauben die Kommutation (Vertauschung der Glieder) für Disjunktion, Konjunktion und Äquivalenz. Die Gesetze (g) (zuweilen DE MORGANS Gesetze genannt) und (h) zeigen, wie die Negationen gewisser Verknüpfungen umgeformt werden können. Die Gesetze (i) erlauben die sogenannte Wendung (oder Transposition oder Kontraposition); (i) (1): die Glieder einer Implikation werden negiert und vertauschen ihre Stelle. (j) (1) stellt die früher angegebene Deutung des Implikationszeichens dar. Die Gesetze (m) besagen, daß Disjunktion und Konjunktion assoziativ sind: bei drei Disjunktions- (bzw. Konjunktions-) Gliedern darf die Art ihrer Zusammenfassung beliebig geändert werden; dasselbe gilt auch für mehr als drei Glieder. Man kann daher in solchen Fällen die Klammern auch fortlassen und einfach schreiben: ‚$A \vee B \vee C$', ‚$A \,.\, B \,.\, C$' und entsprechend für mehr als drei Glieder; vgl. Regel (3) zur Fortlassung von Klammern, **3c**. (n) (1) und (4) erlauben die sogenannte Verteilung (oder Distribution) von Klammerausdrücken. Sie stehen in Analogie zu dem arithmetischen Lehrsatz „$x \,.\, (y + z) = x \,.\, y + x \,.\, z$"; doch besteht der folgende Unterschied: in der Arithmetik gibt es nur ein Ausmultiplizieren, nicht das analoge Ausaddieren; hier aber gilt sowohl (1) wie (4); in (1) steht die Konjunktion in Analogie zur Multiplikation, in (4) die Disjunktion.

8d. Ableitungen. Die in den aufgestellten Lehrsätzen ausgesprochenen L-Implikationen können dazu dienen, aus gegebenen Annahmen, „Prämissen" genannt, deduktiv ein Ergebnis, „Schlußsatz" („Schlußformel" oder „Konklusion") genannt, herzuleiten. Unter einer Ableitung mit gegebenen Prämissen wollen wir eine Folge von Satzformeln verstehen, die mit den Prämissen beginnt und dann schrittweise weitere Satzformeln anfügt, die von vorangegangenen Formeln L-impliziert werden.

Beispiel. Angenommen, wir wissen oder nehmen an, daß ‚$A \,.\, B \supset C$' wahr ist, und außerdem, daß ‚A' wahr und ‚C' falsch ist; was folgt daraus für den Wahrheitswert von ‚B'? Wir können diese Frage entweder mit Hilfe einer Wahrheitstafel beantworten (vgl. **6d**, Übung 3) oder in der folgenden Weise durch eine Ableitung. (Am linken Rand ist jeweils vermerkt, welche der vorangegangenen Sätze verwendet werden und welcher Lehrsatz auf sie angewendet wird.)

Ableitung.	Prämissen: 1)	$A \,.\, B \supset C$	(1)
	2)	A	(2)
	3)	$\sim C$	(3)
(1) L6l(1)		$A \supset (B \supset C)$	(4)
(2) (4) L6—14a		$B \supset C$	(5)
(5) L6i(1)		$\sim C \supset \sim B$	(6)
(3) (6) L6—14a		$\sim B$	(7)

Hiernach ist ‚$\sim B$' von den Prämissen L-impliziert. Auf Grund der Annahmen ist also ‚B' falsch.

Übungen. Man forme die folgenden Sätze so in L-äquivalente Sätze um, daß kein Negationszeichen vor einer Klammer vorkommt. (Hierbei werden die Lehrsätze L6b, g (1), (3) und h (1), (3) angewendet.) 1. ‚$\sim [A \,.\, (B \supset C)]$'. — 2. ‚$\sim [(A \equiv B) \vee (C \,.\, \sim D)]$'.

3. Angenommen, ‚$(A \supset B \,.\, C) \equiv D$' und ‚$B$' sind wahr, ‚$D$' ist falsch; was folgt daraus für den Wahrheitswert von ‚A' und ‚C'? (Über die Beantwortung dieser Frage mit Hilfe einer Wahrheitstafel vgl. **6d**, Übung 4.) Man stelle eine Ableitung auf, die mit den drei Prämissen beginnt: ‚$(A \supset B \,.\, C) \equiv D$' (1), ‚$B$' (2), ‚$\sim D$' (3), und in folgender Weise fortschreitet (hierbei bedeutet „(4) 6i(1) : (5)": „Man wende Lehrsatz L6i(1) auf Satz (4) der Ableitung an und nenne das Resultat ‚(5)'!" (1) 2e(1) : (4); (4) 6i(1): (5); (3) (5) L6—14a: (6); (6) 6h(1): (7); (7) 2b(1): (8); (7) 2b(2): (9); (9) 6g(3): (10); (10) 6j(1): (11); (2) (11) L6—14a: (12). Die Ergebnisse (8) (‚A') und (12) (‚$\sim C$') beantworten die oben gestellte Frage.

4. Nach L4 wird der Satz ‚$(D \equiv \sim B \,.\, C) \supset E$' von ‚$A \equiv B$' und ‚$(D \equiv \sim A \,.\, C) \supset E$' L-impliziert. Man zeige dies durch eine Ableitung, die nicht L4, sondern nur L3 verwendet. (Man kann diese L-Implikation auch durch eine Wahrheitstafel nachweisen; wie viele Zeilen muß die Tafel haben?)

9. All- und Existenzsätze

9a. Individualvariable und Operatoren. Wie früher schon angegeben, wollen wir ‚a', ‚b' usw. als Individualkonstanten verwenden, ‚P', ‚Q' usw. als Prädikate. Aus den Atomsätzen, wie z. B. ‚Pa', Rbc', werden mit Hilfe der Verknüpfungszeichen zusammengesetzte molekulare Sätze gebildet, z. B. ‚$Pa \vee \sim Rbc$'. Es sei ein Satz über das Individuum a gegeben, d. h. ein Satz ‚..a..a..', in dem ‚a' ein oder mehrere Male vorkommt, etwa ‚$Pa \vee Rab$'. Angenommen, wir wollen jetzt ausdrücken, daß das in diesem Satz über a Behauptete nicht nur für a, sondern auch für jedes andere Individuum des zugrunde gelegten Individuenbereiches gilt, so schreiben wir ‚(x)(..x..x..)'; in dem angeführten Beispiel: ‚$(x)(Px \vee Rxb)$'. Der letztere Satz bedeutet also: „Für jedes Individuum x, x hat die Eigenschaft P oder steht in der Relation R zu b". An Stelle von ‚x' kann auch irgend einer der Buchstaben ‚u', ‚v', ‚w', ‚y', ‚z' verwendet werden; wir nennen sie Individualvariable. Individualkonstanten und Individualvariable heißen Individualzeichen. Den ganzen Satz nennen wir einen Allsatz (oder universellen Satz). Den Ausdruck ‚(x)' am Anfang nennen wir einen Alloperator; den Ausdruck in der nachfolgenden Klammer, im obigen Beispiel ‚$Px \vee Rxb$', nennen wir den zu dem Operator gehörigen Operand.

Wollen wir ausdrücken, daß das in dem Satz ‚..a..a..' über a Ausgesagte für mindestens ein Individuum des Bereiches gilt (wobei es offengelassen wird, ob es gerade für a gilt oder nicht), so nehmen wir wieder

eine Variable zu Hilfe, etwa ‚x', und schreiben ‚$(\exists\, x)\,(..x..x..)$'; in Worten: „Für mindestens ein x, $..x..x..$" oder „Es gibt (mindestens) ein x derart, daß $..x..x..$". Der ganze Satz heißt ein Existenzsatz. ‚$(\exists\, x)$' heißt Existenzoperator. Die nachfolgende Satzformel ‚$..x..x..$' heißt wiederum der Operand dieses Operators.

Aus den gegebenen Erklärungen der All- und Existenzsätze geht hervor, daß der Sinn dieser Sätze davon abhängt, was als Individuenbereich genommen wird. Für jede Anwendung der symbolischen Sprache muß festgesetzt werden, was der Individuenbereich ist. Der Bereich kann beliebig gewählt werden; er mag endlich oder unendlich sein. Es ist aber üblich vorauszusetzen, daß er nicht leer ist, d. h. daß es mindestens ein Individuum in dem Bereich gibt. Häufig wird auch vorausgesetzt, daß der Bereich so festgelegt ist, daß die Gesamtanzahl der Individuen des Bereiches gegeben ist.

Satzformeln der beschriebenen Formen heißen All- bzw. Existenzformeln. Satzformeln dieser Arten können auch wieder als Teilformeln in zusammengesetzten Formeln auftreten. Wir wollen zur Ersparung von Klammern folgende Regeln aufstellen (die ersten drei Regeln sind in **3c** angegeben worden). Klammern, die eine Teilformel $\mathfrak{S}_i$ innerhalb einer gegebenen Formel einschließen, dürfen weggelassen werden, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(4). $\mathfrak{S}_i$ besteht aus einem Operator (beliebiger Art) und dem zugehörigen Operanden. [$\mathfrak{S}_i$ mag Glied einer Verknüpfung sein, z. B. ‚$\sim (\exists\, x)\,(Px \vee Qx)$' und ‚$A \,.\, (x)\,(Px \vee Qx)$', oder selbst wieder der Operand eines vorangehenden Operators, z. B. ‚$(\exists\, y)\,(x)\,(Rxy)$'.]

(5). $\mathfrak{S}_i$ ist der Operand eines All- oder Existenzoperators und ist die kleinste Satzformel, die auf den Operator folgt. [Z. B. ‚$(x)\, Px$', ‚$(x) \sim Px$', ‚$(\exists\, x) \sim (y) \sim (\exists\, z)\; Txyz$'; in der letzteren Formel sind 3 Paare von Klammern nach Regel (5) weggelassen worden und 2 nach Regel (4).]

Man beachte den Unterschied zwischen dem Satz ‚$\sim (x)\, Px$' („Nicht jedes Individuum ist P") und dem Satz ‚$(x) \sim Px$' („Jedes Individuum ist nicht-P", d. h. „Kein Individuum ist P")!

Steht eine Variable (entweder eine Individualvariable oder eine Variable der andern Arten, die wir später kennenlernen werden) an einer bestimmten Stelle entweder in einem Operator oder im Operand eines Operators, der die gleiche Variable enthält, so sagen wir, sie sei (an der betreffenden Stelle) durch den Operator gebunden und nennen sie kurz eine gebundene Variable. Eine Variable, die an einer bestimmten Stelle steht und dort nicht gebunden ist, heißt (an dieser Stelle) frei. Ein Ausdruck, der keine freie Variable enthält (also entweder gar keine Variable oder nur gebundene Variable), heißt geschlossen. Ein Ausdruck, der mindestens eine freie Variable enthält, heißt offen. Eine offene Satzformel, die n verschiedene freie Variable enthält, heißt n-stellig (oder vom Grad n). Die geschlossenen Satzformeln sind die Sätze der Sprache A.

9b. Mehrere Operatoren. Der Satz ‚$(x)\,(Px \lor Rxb)$' besagt etwas über das Individuum *b*; er schreibt dem *b* eine gewisse Eigenschaft zu (in dem weiten Sinn, in dem wir hier immer das Wort „Eigenschaft" verwenden). Will man aussagen, daß jedes Individuum des Bereiches diese Eigenschaft hat, so muß man eine zweite Variable und einen zweiten Alloperator mit dieser Variablen verwenden: ‚$(y)\,[(x)\,(Px \lor Rxy)]$'. Will man aussagen, daß die betreffende Eigenschaft mindestens einem Individuum des Bereiches zukommt, so schreibt man: ‚$(\exists\, y)\,[(x)\,(Px \lor Rxy)]$'. Nach der vorhin genannten Regel (4) dürfen die eckigen Klammern in den beiden genannten Formeln weggelassen werden.

Die Sätze ‚$\sim (x)\, Px$' und ‚$(\exists\, x)\,(\sim Px)$' besagen dasselbe. Denn wenn nicht jedes Individuum die Eigenschaft *P* hat, so muß es mindestens eines geben, das sie nicht hat; und umgekehrt. Ebenso besagen die Sätze ‚$\sim (\exists\, x)\, Px$' und ‚$(x)\,(\sim Px)$' dasselbe. Denn wenn nicht mindestens ein Individuum die Eigenschaft *P* hat, so hat jedes Individuum nicht die Eigenschaft *P* (d. h. keines hat sie); und umgekehrt. Wir werden später sehen, daß in jedem der genannten Satzpaare L-Äquivalenz besteht.

9c. Allgemeine Implikationen. Besonders wichtig für die Sprache der Wissenschaft sind solche Allsätze, deren Operand die Form einer Implikation hat; wir nennen sie allgemeine (oder universelle) Implikationen; Beispiel: ‚$(x)\,(Px \supset Qx)$'. Da dieser Satz dasselbe besagt wie ‚$(x)\,(\sim Px \lor Qx)$', so ist er wahr, wenn für jedes Individuum mindestens eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist: 1. es ist nicht *P* (d. h. es hat nicht die Eigenschaft *P*), 2. es ist *Q*. Dabei mag es sein, daß ein gegebenes Individuum *c* nicht *P* ist; in diesem Fall ist es für die Wahrheit des Satzes gleichgültig, ob es *Q* ist oder nicht. Wenn aber irgendein Individuum *P* ist, so muß es auch *Q* sein; denn wenn etwa *c* *P* wäre, aber nicht *Q*, so wäre für *c* keine der beiden genannten Bedingungen erfüllt, also ‚$\sim Pc \lor Qc$' falsch, daher auch der Allsatz falsch. Der Allsatz besagt also, mit andern Worten, das Folgende: „Für jedes *x*, w e n n *x* *P* ist, so ist *x* *Q*". Wir sehen somit, daß im Fall der allgemeinen Implikation die Übersetzung in den wenn-Satz zutrifft, die für die einfache Implikation ‚$A \supset B$' nicht immer den Sinn richtig wiedergibt (vgl. 3b). Eine andere Formulierung in Wortsprache für ‚$(x)\,(Px \supset Qx)$' ist: „Alle *P* sind *Q*". Die meisten Gesetze der Wissenschaft, z. B. der Physik, der Biologie, auch der Psychologie und der Sozialwissenschaft, können in die Form einer allgemeinen Implikation gebracht werden. Z. B. besagt ein Gesetz der Physik ungefähr folgendes: „Wenn der und der Zustand besteht oder der und der Vorgang abläuft, so wird der und der Vorgang folgen", mit andern Worten: „Für jedes physikalische System, falls die und die Bedingungen erfüllt sind, so gilt das und das".

Wenn ein Satz von der Form „Alle .. sind .." in die symbolische Sprache übersetzt werden soll, so muß folgender Unterschied beachtet werden. Im allgemeinen ist ein solcher Satz durch einen symbolischen

Satz der Form ‚$(x)\,(Px \supset Qx)$' wiederzugeben. Wenn aber das erste Prädikat, das hinter „alle" steht, gerade dasjenige ist, durch das der betreffende Individuenbereich charakterisiert worden ist, so daß es notwendigerweise für jedes Individuum zutrifft, so brauchen wir es nicht mitzuübersetzen, sondern können einfach ‚$(x)\,Qx$' schreiben. In der Wortsprache sind Prädikate der genannten Art — die sogenannten Allwörter — nötig, um den Bereich zu bestimmen, auf den sich das Wort „alle" (oder solche Wörter wie „jeder", „ein" und dergleichen) bezieht (vgl. [Syntax] **76**). In einer symbolischen Sprache sind sie nicht nötig, weil vorausgesetzt wird, daß für jede verwendete Variable ihr Wertbereich vorher festgelegt ist; für Individualvariable ist dies der Individuenbereich der betreffenden Sprache. Beispiele (s. die Liste der Prädikate für Beispiele in **2c**): 1. Bereich der Dinge (charakterisiert durch das Allwort „Ding"). „Alle Bücher sind blau": ‚$(x)\,(Buch\,(x) \supset Blau\,(x))$'; dagegen „Alle Dinge sind blau": ‚$(x)\,Blau\,(x)$'. — 2. Bereich der natürlichen Zahlen. „Für jede Primzahl gibt es ...": ‚$(x)\,[Prim\,(x) \supset (\exists\, y)\,(\ldots)]$'; dagegen: „Für jede natürliche Zahl gibt es eine größere": ‚$(x)\,(\exists\, y)\,Gr\,(y, x)$'.

Übungen. Man übersetze die folgenden Sätze in die Wortsprache. 1. ‚$Ml\,(a) \vee Wl\,(a)$'. — 2. ‚$(x)\,(Ml\,(x) \vee Wl\,(x))$'. — 3. ‚$Gr\,(5, 3) \,.\, Gr\,(5, 2)$'. — 4. ‚$Gr\,(5, 3) \supset Gr\,(5, 2)$'. — 5. ‚$(x)\,(Gr\,(x, 3) \supset Gr\,(x, 2))$'. — 6. ‚$Prim\,(3) \,.\, Gr\,(3, 2) \,.\, \sim Gerad\,(3)$'. — 7. ‚$(x)\,[Prim\,(x) \,.\, Gr\,(x, 2) \supset \sim Gerad\,(x)]$'. — 8. ‚$(\exists\, x)\,(Prim\,(x) \,.\, Gr\,(x, 3))$'. — 9. ‚$Quadr\,(9, 3)$'. — 10. ‚$(\exists\, x)\,Quadr\,(x, 3)$'. — 11. ‚$\sim (\exists\, x)\,Quadr\,(3, x)$'; „Es gibt (im Bereich der natürlichen Zahlen) keine Quadratwurzel aus 3". — 12. ‚$(x)\,(\sim Quadr\,(3, x))$'. — 13. ‚$(x)\,[(\exists\, y)\,Eh\,(y, x) \supset Wl\,(x)]$'.

Man übersetze die folgenden Sätze in die symbolische Sprache. (Die eingeklammerten Wörter „Ding", „Zahl", „Mensch" werden — weil Allwörter (s. o.) — nicht mitübersetzt.) 14. „Jedes (Ding) ist blau." — 15. „Es gibt ein blaues (Ding)." — 16. „Jede (Zahl) ist entweder gerade oder nicht gerade." — 17. „Es gibt ein blaues Buch" (Konjunktion). — 18. „Jedes Buch ist blau." — 19. „Es gibt (Zahlen) x, y derart, daß x Quadrat von y ist." — 20. „Es gibt keine (Zahl), die unmittelbarer Vorgänger von 0 ist" (mit Existenzoperator). — 21. „Jede (Zahl) ist nicht unmittelbarer Vorgänger von 0." — 22. „a ist ein Vater", d. h. „a ist Vater von jemandem", d. h. „Es gibt einen (Menschen) derart, daß a Vater von ihm ist". — 23. „Väter sind männlich", d. h. „Für jedes x, wenn x Vater von jemandem ist, so ist x männlich". — 24. „Zu jeder Quadratzahl gibt es eine größere" (mit einem Alloperator und zwei Existenzoperatoren).

9d. Übersetzungen aus der Wortsprache. Bei Übersetzungen in die symbolische Sprache ist zu beachten, daß in der Wortsprache die Allgemeinheit nicht immer durch Wörter wie „jeder", „alle" oder dergleichen ausgedrückt wird, sondern zuweilen auch einfach durch den bestimmten oder den unbestimmten Artikel („der" bzw. „ein"), die im allgemeinen nicht diese Bedeutung haben. In solchen Fällen ist nur aus dem Zusammenhang zu entnehmen, daß Allgemeinheit gemeint ist. Der Ausdruck „der Löwe" ist im Sinn der Allgemeinheit gemeint in einem Satz wie „Der Löwe ist ein Raubtier", dagegen nicht in „der Löwe ist jetzt satt". Der erste Satz bedeutet soviel wie „alle Löwen sind Raubtiere", d. h.: „für jedes x, wenn x ein Löwe ist, so ist x ein Raubtier". Er ist

also zu übersetzen in einen Satz der Form ‚$(x)(Px \supset Qx)$'. Der zweite Satz bedeutet: „dieses Ding a ist ein Löwe, und a ist jetzt satt"; Form: ‚$Pa \,.\, Qa$'. Der Ausdruck „ein Löwe" dient in dem Satz „ein Löwe ist ein Raubtier" zum Ausdruck der Allgemeinheit, dagegen in dem Satz „Karl schießt einen Löwen" zum Ausdruck der Existenz. Der erste Satz ist gleichbedeutend mit „der (oder: jeder) Löwe ist ein Raubtier", wird also übersetzt in ‚$(x)(Px \supset Qx)$'. Der zweite Satz besagt: „es gibt ein x derart, daß folgendes gilt: x ist ein Löwe, und Karl schießt x". Er ist zu übersetzen in einen Satz der Form ‚$(\exists x)(Px \,.\, Rax)$'. Auch Wörter wie „etwas", „jemand" und ähnliche dienen in manchen Fällen zum Ausdruck der Allgemeinheit, in andern Fällen zum Ausdruck der Existenz. Liegt ein Satz vor, in dem solche Wörter wie „ein", „der", „etwas", „jemand", „nichts", „niemand" und ähnliche vorkommen, so findet man den Sinn des Satzes und damit die korrekte Übersetzung in die symbolische Sprache am leichtesten, wenn man den Satz zunächst so umformt, daß an Stelle der genannten Wörter die Wendungen „für jedes x" oder „es gibt ein x" verwendet werden.

Übungen. Man übersetze die folgenden Sätze in die symbolische Sprache. Außer den in **2c** angegebenen Zeichen verwende man die folgenden. 1. Individualkonstanten. Für „Karl": ‚a'; „der Tisch": ‚b'. 2. Einstellige Prädikate. Für „ist zu Hause": ‚H'. 3. Zweistellige Prädikate. Für „sieht": ‚S'; „liegt auf": ‚L'; „gehört": ‚G'. In jedem der Sätze kommt mindestens ein Operator vor. — 1. „Karl sieht etwas." — 2. „Karl sieht ein blaues Buch." — 3. „Etwas liegt auf dem Tisch." — 4. „Wenn etwas auf dem Tisch liegt, so gehört es Karl" („jedes . ."!) — 5. „Wenn etwas auf dem Tisch liegt, so ist Karl zu Hause" („es gibt . ."; man beachte den Unterschied zwischen (4) und (5), der sich in der Wortsprache nur durch das Vorkommen des „es" im zweiten Teilsatz von (4) zu erkennen gibt; wegen dieses „es" muß der Operand in (4) den ganzen Satz umfassen, während er in (5) nur den ersten Teil enthält). — 6. „Wenn irgend eine (Zahl) kleiner als 4 ist, so ist sie (auch) kleiner als 5" („für jedes x"). — 7. „Wenn irgend eine (Zahl) größer als a und kleiner als b ist, so ist a kleiner als b" („es gibt . ."; Unterschied zu (6), wo im zweiten Teil „sie" vorkommt!). — 8. „Wenn eine (Zahl) Vorgänger einer andern ist, so ist sie kleiner als diese." — 9. „Wenn eine (Zahl) Vorgänger einer andern ist, so ist sie oder die andere gerade." — 10. „a ist Freund eines Bruders von b", d. h. „es gibt einen (dritten Menschen) derart, daß . . .". — 11. „9 ist eine Quadratzahl", d. h. „9 ist Quadrat von einer (Zahl)". — 12. „0 ist nicht größer als irgend eine (Zahl)."

10. Prädikatvariable

10a. Prädikatvariable. Auf Grund der gegebenen Erklärungen für All- und Existenzoperatoren ist ein Satz der Form ‚$(x)(\,.\,.\,x\,.\,.\,)$' dann und nur dann wahr, wenn die Satzformel ‚$.\,.\,x\,.\,.$' für jedes Individuum zutrifft; und der Satz ‚$(\exists x)(\,.\,.\,x\,.\,.\,)$' ist dann und nur dann wahr, wenn die Formel für mindestens ein Individuum zutrifft.

Man sieht leicht, daß der Satz ‚$(x)\, Px \supset Pa$' (d. h. ‚$(x)\,(Px) \supset Pa$') in jedem möglichen Fall wahr ist, unabhängig davon, wie die Fakten in bezug auf das Individuum a und die Eigenschaft P sind. Wir brauchen hierfür nur zwei Fälle zu unterscheiden. Fall (1): das Individuum a habe die Eigenschaft P. Dann ist ‚Pa' wahr. Also ist (nach Wahrheits-

tafel I (4)) der ganze Satz wahr. Fall (2): *a* habe nicht die Eigenschaft *P*. Dann ist der Satz ‚(x) Px‘ falsch, weil er besagt, daß alle Individuen die Eigenschaft *P* haben. Also ist der ganze Satz wahr (nach der Wahrheitstafel). Der genannte Satz ist somit notwendigerweise wahr, unabhängig von den Fakten. Das ersieht man auch unmittelbar aus seiner Übersetzung: „Wenn alle Individuen *P* sind, so ist auch *a P*“. Der Satz wird auch L-wahr in unserem technischen Sinn, wenn wir die Bestimmungen über Bewertungen in geeigneter Weise ausdehnen. Das wollen wir jetzt tun.

Wir wollen als bewertbare Zeichen freie Variable und deskriptive Zeichen nehmen; im obigen Satz sind also nur ‚*P*‘ und ‚*a*‘ bewertbar. Als Werte für Individualzeichen wollen wir alle Individuen des betreffenden Bereiches nehmen, und als Werte für einstellige Prädikate Klassen von Individuen. Wir wollen eine einstellige Atomformel dann und nur dann als wahr für eine gegebene Bewertung ansehen, wenn das Individuum, das als Wert des Individualzeichens genommen ist, zu der Klasse gehört, die als Wert des Prädikats genommen ist. Einen Allsatz (etwa ‚(x) Px‘) wollen wir als wahr für eine gegebene Bewertung ansehen, wenn der Operand (hier ‚Px‘) für jede Bewertung von ‚x‘ zusammen mit der gegebenen Bewertung für die übrigen bewertbaren Zeichen (hier nur ‚*P*‘) wahr ist. Wir sehen nun leicht, daß der Satz ‚(x) $Px \supset Pa$‘ für jede Bewertung der bewertbaren Zeichen ‚*P*‘ und ‚*a*‘ wahr ist und daher L-wahr ist. [Die Falleinteilung und die Überlegung ist im wesentlichen dieselbe wie oben, nur jetzt formuliert in bezug auf Bewertungen. Fall (1): die gegebene Bewertung für ‚*P*‘ und ‚*a*‘ sei so, daß das dem ‚*a*‘ zugeordnete Individuum zu der dem ‚*P*‘ zugeordneten Klasse gehört. Bei dieser Bewertung ist ‚Pa‘ wahr und daher der ganze Satz wahr. Fall (2): das dem ‚*a*‘ zugeordnete Individuum gehöre nicht zu der dem ‚*P*‘ zugeordneten Klasse. Bei dieser Bewertung ist ‚(x) Px‘ falsch, da ‚Px‘ nicht für jede Bewertung von ‚x‘ wahr ist (nämlich dann nicht, wenn als Bewertung für x das dem ‚*a*‘ zugeordnete Individuum genommen wird). Also ist bei dieser Bewertung der ganze Satz wahr. Somit ist der Satz bei jeder Bewertung wahr.] Ebenso ist auch die offene Formel ‚(x) $Px \supset Py$‘ L-wahr, da die möglichen Bewertungen für die freie Variable ‚*y*‘ dieselben sind wie die für ‚*a*‘.

Ebenso wie der Satz ‚(x) $Px \supset Pa$‘, ist offenbar auch jeder andere Satz wahr, der dieselbe Form hat, aber mit irgend einem andern Prädikat an Stelle von ‚*P*‘, z. B. ‚(x) $Qx \supset Qa$‘. Wir haben früher gesehen, daß die Verwendung von Satzvariablen nützlich ist, um offene L-wahre Formeln zu bilden, aus denen dann L-wahre Sätze durch beliebige Einsetzungen entstehen. In analoger Weise ist es nun hier nützlich, Prädikatvariable einzuführen. Wir wollen ‚*F*‘, ‚*G*‘, ‚*H*‘, ‚*K*‘ und gelegentlich andere Buchstaben als Prädikatvariable verwenden. Für diese Variablen sind dann Prädikatkonstanten und auch wiederum Prädikatvariable einsetzbar. In Bewertungen von Satzformeln wollen wir für einstellige Prädikatvariable, ebenso wie für einstellige Prädikatkonstanten, Klassen von Individuen nehmen. Dann ist z. B. die offene Formel ‚(x) $Fx \supset Fa$‘

L-wahr, da ja die Bewertungen für ‚*F*' dieselben sind wie früher die für ‚*P*'. Aus dieser L-wahren Formel können dann die obigen L-wahren Sätze durch Einsetzung von ‚*P*' bzw. ‚*Q*' für ‚*F*' erhalten werden. Ferner ist auch die offene Formel ‚$(x)\, Fx \supset Fy$' mit ‚*F*' und ‚*y*' als freien Variablen L-wahr. Es ist die allgemeinste Formel der hier betrachteten Form; die vorher genannten L-wahren Formeln gehen aus ihr durch Einsetzungen hervor. Es ist eine rein logische Formel; deskriptive Konstanten kommen nicht mehr vor.

10b. Intensionen und Extensionen. Wir haben die L-Begriffe auf Grund von Bewertungen definiert. Wir wollen nun einige Fragen in bezug auf die Arten von Werten, die wir hierbei verwendet haben, überlegen. Warum haben wir als Werte von Satzvariablen Wahrheitswerte genommen und nicht Propositionen? Daß das Operieren mit den zwei Wahrheitswerten weit einfacher ist als das Operieren mit den unendlich vielen Propositionen, ist klar. Die Frage ist, ob diese Vereinfachung berechtigt ist. Und für einstellige Prädikatvariable besteht eine ähnliche Frage: sind wir berechtigt, als Werte einfach die Klassen von Individuen zu nehmen anstatt der Eigenschaften? Um diese Fragen zu klären, wollen wir jetzt die semantischen Begriffe Intension und Extension einführen. (Ein Leser, der hauptsächlich das Ziel hat, die technische Arbeit mit der symbolischen Sprache zu erlernen und der an semantischen und philosophischen Fragen weniger interessiert ist, mag diesen Teil (**10b**) überschlagen.)

Ein einstelliges Prädikat bezeichnet eine Eigenschaft (z. B. bezeichnet ‚*Buch*' die Eigenschaft, ein Buch zu sein, ‚*Blau*' die Farbe Blau, die eine Eigenschaft gewisser Dinge ist). Diese Eigenschaft wollen wir die Intension (oder den Inhalt oder Begriffsinhalt) des Prädikates nennen. Unter der Extension (dem Umfang oder Begriffsumfang) eines Prädikates verstehen wir die Klasse der Individuen, für die das Prädikat zutrifft, also derer, die die bezeichnete Eigenschaft haben. Z. B. ist die Extension von ‚*Buch*' die Klasse der Bücher, die von ‚*Blau*' die Klasse der blauen Dinge. Analog verstehen wir unter der Intension eines zweistelligen Prädikates die durch das Prädikat bezeichnete zweistellige Relation, und unter seiner Extension die Klasse der geordneten Paare von Individuen, für die das Prädikat zutrifft. Z. B. ist die Intension von ‚*Va*' die Vaterrelation, und die Extension ist die Klasse aller Paare, die aus einem Vater und einem seiner Kinder bestehen. Allgemein, für irgend ein $n \geqq 2$ ist die Intension eines n-stelligen Prädikates die bezeichnete n-stellige Relation, und die Extension ist die Klasse der geordneten n-tupel, für die das Prädikat zutrifft. Unter der Intension eines Satzes wollen wir die durch ihn bezeichnete Proposition verstehen, und unter seiner Extension seinen Wahrheitswert. Das letztere ist dadurch begründet, daß der Wahrheitswert eines Satzes eine analoge Rolle spielt wie die einem Prädikat entsprechende Individuenklasse. Es ist nützlich, wenn auch nicht üblich, eine analoge Unterscheidung für Individualkonstanten (oder allgemeiner für geschlossene Individualausdrücke) zu machen. Angenommen, der Vater von Peter Braun ist der Bürgermeister von

Buxtehude. Dann beziehen sich die beiden Phrasen „der Vater von Peter Braun“ und „der Bürgermeister von Buxtehude“ (oder die entsprechenden Individualausdrücke unserer symbolischen Sprache, die wir später als „Kennzeichnungen“ einführen werden, s. **35**) auf dasselbe Individuum. Wir wollen dann sagen, daß diese beiden Phrasen dieselbe Extension haben, nämlich dieses Individuum. Die Phrasen haben aber offenbar verschiedenen Sinn. Unter der Intension eines Individualausdruckes wollen wir seinen Sinn verstehen. Das ist ein ähnlicher Begriff wie Eigenschaft oder Relation, aber von anderem Typus, für den es keine übliche Bezeichnung gibt. Wir wollen den Term „Individualbegriff“ dafür verwenden. Später werden wir noch andere Begriffe kennenlernen, darunter auch Funktionen, z. B. die arithmetische Funktion der Summe, bezeichnet durch ‚+‘. Unter der Intension eines solchen Funktionszeichens (oder Funktors) wollen wir die damit bezeichnete Funktion verstehen, und unter seiner Extension den Wertverlauf der Funktion, der später erläutert werden wird.

Angenommen, die symbolische Sprache enthält Variable, für die die Konstanten und die geschlossenen zusammengesetzten Ausdrücke einer bestimmten Art einsetzbar sind. In Analogie zur Unterscheidung zwischen der Intension und der Extension einer Konstanten kann man hier unterscheiden zwischen den Wertintensionen und den Wertextensionen einer Variablen. Die Intensionen aller für eine Variable einsetzbaren Ausdrücke gehören zu den Wertintensionen der Variablen, und die Extensionen der einsetzbaren Ausdrücke zu den Wertextensionen. Wenn man von den „Werten“ einer Variablen spricht, so denkt man meist an die Wertintensionen. Aber für die Beurteilung der L-Wahrheit von logischen Formeln in einer Sprache von der einfachen Struktur der hier behandelten symbolischen Sprachen genügt es, die Wertextensionen in Betracht zu ziehen. So sind z. B. die Werte (im Sinn der Wertintensionen) der Satzvariablen ‚p‘ usw. Propositionen. Aber, wie wir gesehen haben, braucht man zur Feststellung des tautologischen Charakters der Formel ‚$p \vee \sim p$‘ nicht die zahlreichen (unter Umständen unendlich vielen) Propositionen in Betracht zu ziehen, sondern nur die beiden Wahrheitswerte, also die Wertextensionen der Variablen. Das liegt daran, daß der Wahrheitswert eines Verknüpfungssatzes durch die Wahrheitswerte der Glieder eindeutig bestimmt ist; die hier verwendeten Satzverknüpfungen sind extensional. Der Wahrheitswert eines Atomsatzes hängt offenbar nur ab von der Extension des Prädikates und der der Individualkonstanten; ein Atomsatz ist daher auch extensional. Und der Wahrheitswert eines Allsatzes hängt nur ab von der Extension der durch den Operanden bestimmten Eigenschaft (nämlich davon, ob diese Eigenschaft allen Individuen zukommt oder nicht); also ist ein Allsatz auch extensional. Dasselbe gilt für einen Existenzsatz. Unsere symbolischen Sprachen A, B und C sind extensionale Sprachen; damit ist gemeint, daß hier ein Satz seinen Wahrheitswert nicht ändert, wenn in ihm irgend ein Ausdruck durch einen andern Ausdruck mit derselben Extension ersetzt wird. Daher genügt es für die Auswertung einer Formel, mögliche

Extensionen der deskriptiven Konstanten und Wertextensionen der vorkommenden Variablen zu berücksichtigen.

Eine symbolische Sprache, die, im Unterschied zu den hier behandelten, auch Symbole für die sogenannten logischen Modalitäten enthält — d. h. für solche Begriffe wie Notwendigkeit, Möglichkeit, Unmöglichkeit, Kontingenz und dergleichen —, ist nicht extensional. Angenommen, es regnet (jetzt hier) nicht. Dann ist der Satz „Es regnet" falsch, hat also dieselbe Extension (Wahrheitswert) wie der (L-falsche) Satz „Es regnet und es regnet nicht". Wenn aber der zweite dieser beiden Sätze durch den ersten Satz im Zusammenhang eines größeren modalen Satzes ersetzt wird, so bleibt der Wahrheitswert des ganzen Satzes nicht immer ungeändert. Z. B. ist der modale Satz „Es ist unmöglich, daß es regnet und nicht regnet" wahr, während der Satz „Es ist unmöglich, daß es regnet" falsch ist, da der Fall, daß es (jetzt hier) regnet, zwar nicht zutrifft, aber doch logisch möglich ist. In einer solchen nicht-extensionalen Sprache würde es nicht genügen, als Werte von deskriptiven Konstanten und Variablen nur Extensionen zu nehmen; man müßte auch Intensionen in Betracht ziehen.

Die meisten Systeme der symbolischen Logik verwenden eine extensionale Sprache. Der Grund hierfür ist die weit größere Einfachheit der Struktur einer solchen Sprache und damit der für sie aufzustellenden Regeln. Hierbei werden die logischen Modalitäten nicht etwa vernachlässigt; sie werden in einer andern Weise mit Hilfe der L-Begriffe in der Metasprache ausgedrückt. Anstatt zu sagen, daß eine gewisse Proposition (oder ein Sachverhalt) notwendig (oder unmöglich oder möglich oder kontingent) ist, sagen wir hier, daß ein entsprechender Satz (d. h. einer, der die betreffende Proposition bezeichnet) L-wahr (bzw. L-falsch, nicht L-falsch, L-indeterminiert) ist. ‚A' bezeichne etwa die Proposition (den möglichen Sachverhalt), daß es (jetzt hier) regnet; also bezeichnet ‚$A \vee \sim A$' die Proposition, daß es regnet oder nicht regnet. In einer Modalitätssprache mit Worten wird man sagen, „Es ist notwendig, daß es regnet oder nicht regnet"; ebenso in einer symbolischen Modalitätssprache mit ‚N' für „notwendig": ‚$N\,(A \vee \sim A)$'. Bei unserer Methode dagegen kann dies nicht in der Objektsprache ausgedrückt werden, da

Die Intensionen und Extensionen der wichtigsten Ausdruckstypen

Ausdruck	Intension	Extension
Satz	Proposition	Wahrheitswert
Individualkonstante	Individualbegriff	Individuum
Einstelliges Prädikat	Eigenschaft	Klasse
n-stelliges Prädikat ($n > 1$)	n-stellige Relation	Klasse geordneter n-tupel von Individuen
Funktor	Funktion	Wertverlauf

diese extensional ist. Wir können aber in der Metasprache den entsprechenden Satz formulieren: „Der Satz ‚$A \vee \sim A$' ist L-wahr".

11. Bewertungen

Auf Grund der vorangegangenen Überlegungen wollen wir jetzt die Begriffe der Bewertung und der Auswertung allgemein erklären. Diese Begriffe haben wir früher (5) nur auf Satzvariable und Satzkonstanten bezogen; jetzt soll ihre Anwendung auf andere Arten von Zeichen ausgedehnt werden. Wir rechnen als bewertbare Zeichen in einer gegebenen Satzformel $\mathfrak{S}_i$ alle deskriptiven Zeichen und alle freien Variablen in $\mathfrak{S}_i$. Eine Bewertung für $\mathfrak{S}_i$ besteht darin, daß jedem bewertbaren Zeichen in $\mathfrak{S}_i$ eine mögliche Extension zugeordnet wird. Für Bewertungen wollen wir das Zeichen ‚$\mathfrak{B}$' der Metasprache verwenden. Denjenigen bewertbaren Zeichen, die wir bisher in die symbolische Sprache eingeführt haben, werden somit Werte der folgenden Arten zugeordnet:

(1) einem Satzzeichen: ein Wahrheitswert;

(2) einem Individualzeichen: ein Individuum (des gegebenen Individuenbereiches);

(3) einem einstelligen (deskriptiven) Prädikat oder einer einstelligen Prädikatvariablen: eine Klasse von Individuen;

(4) einem n-stelligen (deskriptiven) Prädikat oder einer n-stelligen Prädikatvariablen ($n > 1$): eine Klasse von geordneten n-tupeln von Individuen.

Wenn ein bewertbares Zeichen mehrmals in der gegebenen Formel vorkommt, so wird ihm an allen Stellen, an denen es vorkommt (bei einer Variablen: an allen Stellen, an denen sie frei vorkommt), dieselbe Extension zugeordnet.

Angenommen, eine Satzformel $\mathfrak{S}_i$ sei gegeben und eine beliebige Bewertung $\mathfrak{B}_k$ für die bewertbaren Zeichen in $\mathfrak{S}_i$ sei gewählt. Dann geschieht die Auswertung, d. h. die Feststellung des Wahrheitswertes von $\mathfrak{S}_i$ in bezug auf $\mathfrak{B}_k$, nach den folgenden Auswertungsregeln. In jeder Regel schreiben wir kurz „W: ..." für „Das Folgende ist eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß der Formel $\mathfrak{S}_i$ der Wert W in bezug auf $\mathfrak{B}_k$ zugeschrieben wird: ...", mit andern Worten: „Wenn ..., so ist $\mathfrak{S}_i$ wahr in bezug auf $\mathfrak{B}_k$; wenn nicht ..., so ist $\mathfrak{S}_i$ falsch in bezug auf $\mathfrak{B}_k$".

+ **R11—1.** Auswertungsregeln für eine Satzformel $\mathfrak{S}_i$ auf Grund einer Bewertung $\mathfrak{B}_k$.

a. $\mathfrak{S}_i$ sei eine einstellige Atomformel. Dann besteht $\mathfrak{B}_k$ aus einer Klasse von Individuen (als Wert für das Prädikat) und einem Individuum (als Wert für das Individualzeichen). W: dieses Individuum gehört zu der Klasse.

b. $\mathfrak{S}_i$ sei eine n-stellige Atomformel ($n > 1$). $\mathfrak{B}_k$ besteht aus einer Klasse von geordneten n-tupeln von Individuen und einem solchen n-tupel. W: das n-tupel gehört zu der Klasse.

c. $\mathfrak{S}_i$ sei $\sim \mathfrak{S}_j$. W: der Wert von $\mathfrak{S}_j$ (in bezug auf $\mathfrak{B}_k$) ist F.
d. $\mathfrak{S}_i$ sei $\mathfrak{S}_j \vee \mathfrak{S}_k$. W: mindestens eines der beiden Glieder $\mathfrak{S}_j$ und $\mathfrak{S}_k$ hat den Wert W.
e. $\mathfrak{S}_i$ sei $\mathfrak{S}_j \,.\, \mathfrak{S}_k$. W: beide Glieder haben den Wert W.
f. $\mathfrak{S}_i$ sei $\mathfrak{S}_j \supset \mathfrak{S}_k$. W: $\mathfrak{S}_j$ hat den Wert F oder $\mathfrak{S}_k$ den Wert W oder beides ist der Fall.
g. $\mathfrak{S}_i$ bestehe aus einem Alloperator und der Formel $\mathfrak{S}_j$ als Operanden. W: $\mathfrak{S}_j$ ist wahr für jede beliebige Bewertung der in dem Alloperator vorkommenden Variablen zusammen mit der Bewertung $\mathfrak{B}_k$. [Falls die Variable des Alloperators in $\mathfrak{S}_j$ nicht frei vorkommt, W: $\mathfrak{S}_j$ ist wahr für $\mathfrak{B}_k$.]
h. $\mathfrak{S}_i$ bestehe aus einem Existenzoperator und der Formel $\mathfrak{S}_j$ als Operanden. W: $\mathfrak{S}_j$ ist wahr für mindestens eine Bewertung der in dem Existenzoperator vorkommenden Variablen zusammen mit der Bewertung $\mathfrak{B}_k$. [Falls die Variable des Existenzoperators in $\mathfrak{S}_j$ nicht frei vorkommt, W: $\mathfrak{S}_j$ ist wahr für $\mathfrak{B}_k$.]
i. $\mathfrak{S}_i$ sei eine Identitätsformel (**17a**), bei der das Identitätszeichen ‚=' zwischen zwei Individualausdrücken steht. W: die beiden Individualausdrücke haben dasselbe Individuum als Wert.

Eine gegebene Bewertung für eine Satzformel bestimmt zunächst die Werte für die bewertbaren Zeichen dieser Formel. Die Anwendung der Auswertungsregeln, zunächst auf Atomformeln und dann schrittweise auf umfassendere Teilformeln, führt dann schließlich zum Wahrheitswert der ganzen Formel.

Wenn die Formel $\mathfrak{S}_i$ in bezug auf die Bewertung $\mathfrak{B}_k$ wahr ist, so sagen wir auch, daß $\mathfrak{B}_k$ oder die durch $\mathfrak{B}_k$ zugeordneten Werte die Formel $\mathfrak{S}_i$ erfüllen.

Unter dem Spielraum einer Satzformel $\mathfrak{S}_i$ verstehen wir die Klasse der Bewertungen, bei denen $\mathfrak{S}_i$ wahr ist. Dies ist dieselbe Definition wie früher (5), aber jetzt bezogen auf den erweiterten Begriff der Bewertungen. Die Definitionen der L-Begriffe bleiben dieselben wie früher; wir wollen sie darum nicht wiederholen. Aber sie sind jetzt auch anwendbar auf weitere Arten von Formeln, insbesondere solche mit Individualvariablen und Prädikatvariablen.

Wir nennen eine Formel deskriptiv, wenn sie mindestens ein deskriptives Zeichen enthält, andernfalls logisch. Eine logische Formel enthält also nur Variable und logische Konstanten. Für offene logische Formeln (also solche mit freien Variablen als einzigen bewertbaren Zeichen) wird häufig die folgende Terminologie gebraucht. Eine solche Formel wird allgemeingültig genannt, wenn sie von jeder Bewertung erfüllt wird; erfüllbar, wenn sie von mindestens einer Bewertung erfüllt wird; unerfüllbar, wenn sie von keiner Bewertung erfüllt wird. Wir werden meist anstatt dieser Terme die L-Terme ‚L-wahr', ‚nicht L-falsch' bzw. ‚L-falsch' verwenden; sie haben den Vorzug einer einheitlichen Termino-

logie für offene logische Formeln, offene deskriptive Formeln und geschlossene Formeln (Sätze).

12. Einsetzungen

12a. Einsetzungen für Satzvariable. Wir haben früher überlegt, daß eine Satzformel, die aus einer gegebenen L-wahren Satzformel mit einer freien Satzvariablen durch eine beliebige Einsetzung für diese Variable entsteht, auch L-wahr ist. Analoges gilt nun auch für andere Variable. Daher werden wir später Listen von rein logischen L-wahren Satzformeln mit freien Individualvariablen und Prädikatvariablen (die wir zunächst nur als freie Variable verwenden) aufstellen. Alle Formeln, die man aus diesen durch Einsetzungen bilden kann, sind dann auch L-wahr. Wir müssen nun genauer festsetzen, wie Einsetzungen für freie Variable der verschiedenen Arten vorzunehmen sind. Bei jeder Einsetzung für eine Variable in einer gegebenen Formel muß an allen Stellen, an denen die Variable in der Formel frei vorkommt (diese Stellen heißen die „Einsetzungsstellen"), derselbe Ausdruck eingesetzt werden; eine Ausnahme bildet die Formeleinsetzung für eine Prädikatvariable, die später erklärt werden wird.

Einsetzung für eine Satzvariable. Früher war die Einsetzung einer beliebigen Satzformel für eine freie Variable zulässig. Nachdem wir aber jetzt auch gebundene Variable in unserem System haben, müssen wir die Einsetzung in folgender Weise beschränken. Für eine Satzvariable in einer gegebenen Satzformel $\mathfrak{S}_i$ darf eine beliebige Satzformel $\mathfrak{S}_j$ eingesetzt werden, vorausgesetzt, daß keine Individualvariable, die in $\mathfrak{S}_j$ frei vorkommt, an einer der Einsetzungsstellen in $\mathfrak{S}_i$ gebunden sein würde. So darf z. B. in ‚$(x)\,(p \supset Fx) \equiv [p \supset (x)\,Fx]$' für ‚$p$' keine Formel eingesetzt werden, in der ‚x' frei vorkommt, weil ‚x' an der ersten Einsetzungsstelle gebunden sein würde. [An diesem Beispiel können wir leicht den Grund für die Beschränkung erkennen. Die genannte Formel ist L-wahr. Die Einsetzung von ‚Px' für ‚p' würde aber zu der folgenden Formel $\mathfrak{S}_k$ führen, die sich als nicht L-wahr herausstellt: ‚$(x)\,(Px \supset Fx) \equiv [Px \supset (x)\,Fx]$'. Wir bilden hieraus eine Einsetzungsinstanz $\mathfrak{S}_l$: ‚$(x)\,(Px \supset Px) \equiv [Pa \supset (x)\,Px]$'. (Hier ist ‚$P$' für ‚$F$' und ‚$a$' für ‚$x$' eingesetzt worden; man beachte, daß nur das vierte ‚x' frei ist und durch ‚a' ersetzt wird.) $\mathfrak{B}_k$ sei eine Bewertung, die dem ‚P' eine Klasse zuordnet, die nicht alle Individuen enthält, wohl aber das dem ‚a' zugeordnete Individuum. Bei dieser Bewertung ist ‚Pa' wahr und ‚$(x)\,Px$' falsch, also die rechte Seite der Äquivalenz $\mathfrak{S}_l$ falsch. Die linke Seite ist aber stets wahr, also ist $\mathfrak{S}_l$ bei dieser Bewertung falsch. Daher ist $\mathfrak{S}_l$ nicht L-wahr, also auch $\mathfrak{S}_k$ nicht.]

12b. Einsetzungen für Individualvariable. Für eine Individualvariable darf eine beliebige Individualkonstante oder eine Individualvariable eingesetzt werden, jedoch mit folgender Beschränkung: keine Individualvariable darf eingesetzt werden, die an einer der Einsetzungs-

stellen gebunden sein würde. So darf z. B. in ‚(x) $Ryx \vee (\exists z)$ Szy' für ‚y' jede beliebige Individualkonstante und jede Individualvariable mit Ausnahme von ‚x' und ‚z' eingesetzt werden; ‚x' würde an der Stelle des ersten ‚y' gebunden sein und ‚z' an der Stelle des zweiten. [Der Grund für die Beschränkung wird ersichtlich durch folgendes Beispiel im Bereich der natürlichen Zahlen. Die Formel ‚$(\exists x)$ $Gr(x, y)$' gilt für jedes y. Denn sie besagt „Es gibt eine Zahl x, die größer ist als y". Würden wir nun zulassen, in dieser Formel für die freie Variable ‚y' ‚x' einzusetzen, obwohl ‚x' an der Einsetzungsstelle gebunden ist, so würden wir folgenden Satz erhalten: ‚$(\exists x)$ $Gr(x, x)$'. Dieser Satz ist aber offenbar falsch; er besagt: „Es gibt eine Zahl, die größer ist als sie selbst".]

12c. Einsetzungen für Prädikatvariable. Hier müssen wir zwei verschiedene Arten der Einsetzung unterscheiden. Wir haben schon früher die einfache Einsetzung erwähnt: für eine n-stellige Prädikatvariable darf ein beliebiges n-stelliges Prädikat oder eine beliebige n-stellige Prädikatvariable eingesetzt werden, ohne Beschränkung.

Es gibt nun noch eine zweite Art der Einsetzung für eine Prädikatvariable; wir wollen sie die Formeleinsetzung nennen. Betrachten wir zunächst ein Beispiel. Wir überlegten früher (**10a**), daß die Satzformel $\mathfrak{S}_i$ ‚(x) $Fx \supset Fa$' L-wahr ist, also für jede Eigenschaft F zutrifft. Wenn wir aussagen wollen, daß das, was $\mathfrak{S}_i$ für alle Eigenschaften aussagt, im besondern für die Eigenschaften P, Q usw. gilt, so können wir das leicht formulieren durch Instanzen mit einfacher Einsetzung: ‚(x) $Px \supset Pa$', ‚(x) $Qx \supset Qa$' usw. Nun sind aber nicht alle Eigenschaften, die in der symbolischen Sprache ausdrückbar sind, durch Prädikate wie ‚P', ‚Q' usw. bezeichnet. Denn jede beliebige Satzformel mit einer Individualvariablen als einziger freier Variabler drückt ja eine Eigenschaft von Individuen aus. So wird z. B. durch die Formel $\mathfrak{S}_k$ ‚$Qx \vee Rxb$' die Eigenschaft von x, Q zu sein oder zu b in der Relation R zu stehen, ausgedrückt. Auch für diese Eigenschaft gilt, was der Satz $\mathfrak{S}_i$ für alle Eigenschaften aussagt; das wird ausgesprochen durch den Satz $\mathfrak{S}_l$: ‚(x) $(Qx \vee Rxb) \supset Qa \vee Rab$'. Wir wollen auch diesen Satz als eine Einsetzungsinstanz von $\mathfrak{S}_i$ auffassen. Hier wird nun nicht einfach für ‚F' ein Prädikat eingesetzt. Vielmehr wird zunächst die Vollformel ‚Fx' durch eine zusammengesetzte Formel $\mathfrak{S}_k$ ‚$Qx \vee Rxb$' ersetzt, und dann ‚Fa' durch die entsprechende Formel gemäß dem folgenden Schema:

‚Fx', ‚$Qx \vee Rxb$',
‚Fa', ‚$Qa \vee Rab$'.

Dieses Schema ist folgendermaßen gebildet. In der ersten Zeile schreiben wir eine offene Vollformel von ‚F', genannt die Nennformel, und dazu diejenige Formel mit derselben freien Variablen, die wir als „Substitut" gewählt haben. Das Substitut drückt diejenige Eigenschaft aus, für die wir einen Spezialfall der gegebenen Formel $\mathfrak{S}_i$ bilden wollen. Da in $\mathfrak{S}_i$ außer ‚Fx' auch ‚Fa' vorkommt, so schreiben wir in der zweiten Zeile neben ‚Fa' die Formel, die aus der zweiten Formel der ersten Zeile durch

dieselbe Einsetzung gebildet wird, wie ‚*Fa*' aus ‚*Fx*', nämlich die Einsetzung von ‚*a*' für ‚*x*'. Wenn in der gegebenen Formel etwa noch ‚*Fu*' und ‚*Fb*' vorkämen, so würden wir noch die folgenden zwei Formelpaare in das Schema aufnehmen:

‚*Fu*', ‚*Qu* ∨ *Rub*',
‚*Fb*', ‚*Qb* ∨ *Rbb*'.

Die Formeln jedes Paares werden aus den Formeln des ersten Paares durch gleiche Einsetzungen für die Individualvariablen, die in der Nennformel vorkommen, geformt. Die Einsetzungen werden so gewählt, daß die erste Formel des Paares die ist, die an einer bestimmten Stelle in der gegebenen Formel vorkommt. Die gesamte Einsetzung besteht dann darin, daß gleichzeitig alle Vollformeln von ‚*F*' in der gegebenen Formel ersetzt werden; hierbei wird als Substitut für jede Vollformel diejenige Formel genommen, die im Schema neben ihr steht. Das erste Paar im Schema stellt die von uns gewählte Einsetzung dar; in allen weiteren Paaren ist dann die zweite Formel eindeutig bestimmt. Das erste Paar ist in weitem Maße frei wählbar, jedoch nicht ganz unbeschränkt. Wir wollen jetzt die allgemeinen Regeln hierfür aufstellen. $\mathfrak{S}_i$ sei eine gegebene Formel, in der eine *n*-stellige Prädikatvariable vorkommt, für die eine Einsetzung vorgenommen werden soll. $\mathfrak{S}_j$ sei die Nennformel, $\mathfrak{S}_k$ das gewählte Substitut für $\mathfrak{S}_j$.

1. Die Nennformel $\mathfrak{S}_j$ besteht aus der betreffenden Prädikatvariablen und *n* beliebigen, verschiedenen Individualvariablen.

2. Als Substitut $\mathfrak{S}_k$ für $\mathfrak{S}_j$ darf eine beliebige Satzformel gewählt werden, die die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

a. Die Variablen von $\mathfrak{S}_j$ dürfen in $\mathfrak{S}_k$ nicht in Operatoren vorkommen. (Gewöhnlich kommen sie in $\mathfrak{S}_k$ als freie Variable vor; aber das ist nicht notwendig.)

b. Die Variablen, die in $\mathfrak{S}_i$, aber nicht in $\mathfrak{S}_j$ vorkommen, dürfen in $\mathfrak{S}_k$ nicht vorkommen. (Variable, die weder in $\mathfrak{S}_i$ noch in $\mathfrak{S}_j$ vorkommen, dürfen in $\mathfrak{S}_k$ beliebig vorkommen, frei oder gebunden.)

3. Aus dem Formelpaar $\mathfrak{S}_j$, $\mathfrak{S}_k$ werden andere Formelpaare durch gleiche Einsetzungen für die in $\mathfrak{S}_j$ vorkommenden Variablen geformt.

4. Die Einsetzung von $\mathfrak{S}_k$ für $\mathfrak{S}_j$ in $\mathfrak{S}_i$ besteht darin, daß jede Vollformel der betreffenden Prädikatvariablen in $\mathfrak{S}_i$ durch das Substitut ersetzt wird, das mit ihr gemäß Regel (3) gepaart ist.

12d. Lehrsätze über Einsetzungen.

+L12—1. $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ seien beliebige Satzformeln. $\mathfrak{S}_i'$ und $\mathfrak{S}_j'$ seien aus $\mathfrak{S}_i$ bzw. $\mathfrak{S}_j$ durch dieselben Einsetzungen der folgenden vier Arten für eine oder mehrere (nicht notwendig alle) der frei vorkommenden Variablen gebildet: (1) Einsetzung für eine Satzvariable, (2) Einsetzung für eine Individualvariable, (3) einfache Einsetzung für eine Prädikatvariable, (4) Formeleinsetzung für eine Prädikatvariable. Dann gilt Folgendes:

a. Wenn $\mathfrak{S}_i$ L-wahr ist, so ist auch $\mathfrak{S}_i'$ L-wahr.

Beweis. Die Behauptung ist für Satzvariable früher bewiesen worden: L7—1a. Die Überlegungen für die andern Einsetzungsarten sind analog. Da $\mathfrak{S}_i$ von allen Bewertungen der betreffenden Variablen und der übrigen bewertbaren Zeichen erfüllt wird, so auch von jeder Bewertung des eingesetzten Ausdruckes, die sich aus einer beliebig gewählten Bewertung für die in ihm vorkommenden bewertbaren Zeichen ergibt. — Bei der Formeleinsetzung für eine Prädikatvariable ist die Sachlage etwas komplizierter, aber in den wesentlichen Zügen nicht verschieden. Betrachten wir ein ähnliches Beispiel wie früher: die Einsetzung der Formel $\mathfrak{S}_k$ ‚$Qx \vee Rxb$' für ‚Fx' in einer L-wahren Satzformel $\mathfrak{S}_i$, in der ‚F' in folgenden Atomformeln vorkommt: ‚Fa', ‚Fx' (in der Verbindung ‚$(x)\,Fx$'), ‚Fb' und ‚Fu' (wobei ‚u' eine freie Variable in $\mathfrak{S}_i$ ist). $\mathfrak{S}_i'$ wird aus $\mathfrak{S}_i$ dadurch gebildet, daß ‚Fx' durch ‚$Qx \vee Rxb$' ersetzt wird, ‚Fa' durch ‚$Qa \vee Rab$', ‚Fb' durch ‚$Qb \vee Rbb$' und ‚Fu' durch ‚$Qu \vee Rub$'. $\mathfrak{B}_j$ sei eine beliebige Bewertung für die bewertbaren Zeichen, die außer ‚F' in $\mathfrak{S}_i$ etwa noch vorkommen (dazu gehören ‚a', ‚b', ‚u' und etwa noch andere Zeichen). $\mathfrak{S}_k$ enthält außer ‚x' und ‚b' noch die neuen bewertbaren Zeichen ‚Q' und ‚R'. $\mathfrak{B}_i'$ sei eine beliebig gewählte Bewertung für diese beiden Zeichen. Auf Grund von $\mathfrak{B}_i'$ und $\mathfrak{B}_j$ (für ‚b') bestimmt $\mathfrak{S}_k$ eine gewisse Klasse K (nämlich die Klasse der Individuen, die, als Bewertung für ‚x' genommen, diesen Ausdruck wahrmachen; das ist die Klasse derjenigen Individuen, die entweder zu der für ‚Q' gewählten Klasse gehören oder zu dem für ‚b' gewählten Individuum in der für ‚R' gewählten Relation stehen). $\mathfrak{B}_i$ sei die Bewertung, die dem ‚F' die Klasse K zuordnet. Nun sehen wir leicht, daß die Bewertung $\mathfrak{B}_j + \mathfrak{B}_i$ für $\mathfrak{S}_i$ zu demselben Wahrheitswert führt wie die Bewertung $\mathfrak{B}_j + \mathfrak{B}_i'$ für $\mathfrak{S}_i'$. Denn auf Grund dieser Bewertung ist einerseits ‚Fa' und anderseits ‚$Qa \vee Rab$' dann und nur dann wahr, wenn das dem ‚a' durch $\mathfrak{B}_j$ zugeordnete Individuum zur Klasse K gehört. Ferner ist auf Grund der genannten Bewertungen zusammen mit irgend einer Bewertung für ‚x' einerseits ‚Fx' und anderseits ‚$Qx \vee Rxb$' dann und nur dann wahr, wenn das dem ‚x' zugeordnete Individuum zu K gehört; daher ist einerseits ‚$(x)Fx$' und anderseits ‚$(x)\,(Qx \vee Rxb)$' dann und nur dann wahr, wenn K die Klasse aller Individuen ist. Analoges gilt für die Atomformeln ‚Fu', ‚Fb' und ihre Substitute. Da $\mathfrak{S}_i$ L-wahr ist, so ist es wahr für alle Bewertungen, also auch für $\mathfrak{B}_j + \mathfrak{B}_i$. Daher ist $\mathfrak{S}_i'$ wahr für $\mathfrak{B}_j + \mathfrak{B}_i'$. Da $\mathfrak{B}_j$ und $\mathfrak{B}_i'$ beliebig gewählt sind, so ist $\mathfrak{S}_i'$ wahr für jede Bewertung. Also ist es L-wahr.

b. Wenn $\mathfrak{S}_i$ L-falsch ist, so ist auch $\mathfrak{S}_i'$ L-falsch. (Aus (a) und L5—2a.)

c. Wenn $\mathfrak{S}_i'$ L-indeterminiert ist, so ist auch $\mathfrak{S}_i$ L-indeterminiert. (Aus (a) und (b).)

d. Wenn $\mathfrak{S}_i$ $\mathfrak{S}_j$ L-impliziert, so auch $\mathfrak{S}_i'$ $\mathfrak{S}_j'$. (Aus (a) und L6—4.)

e. Wenn $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ L-äquivalent sind, so auch $\mathfrak{S}_i'$ und $\mathfrak{S}_j'$. (Aus (a) und L6—7.)

Das Ergebnis, daß L-Wahrheit bei beliebigen Einsetzungen erhalten bleibt (L1a), ist von großer Wichtigkeit. Unter einer Ableitung verstehen wir eine Reihe von Satzformeln, die mit gegebenen Formeln (Prämissen) beginnt und Schritt für Schritt zu weiteren Formeln führt, die von vorangehenden Formeln L-impliziert sind. Unter einem Beweis wollen wir eine Ableitung verstehen, deren Prämissen L-wahr sind. Offenbar ist jede Formel eines Beweises L-wahr (nach L6—1a). Der Zweck der Aufstellung eines Beweises besteht darin zu zeigen, daß die Endformel L-wahr ist. Nach dem oben genannten Ergebnis sind

beliebige Einsetzungen als Schritte in Beweisen zulässig. Es ist zu beachten, daß im allgemeinen die ursprüngliche Formel $\mathfrak{S}_i$ das Einsetzungsergebnis $\mathfrak{S}_i'$ nicht L-impliziert (darauf werden wir im nächsten Paragraphen zurückkommen). Daher sind in Ableitungen im allgemeinen, im Unterschied zu Beweisen, Einsetzungen nicht zulässig. Ferner ist das genannte Ergebnis wichtig für die praktische Verwendung gegebener Listen L-wahrer Formeln, z. B. der Listen, die wir in **14** aufstellen werden.

+**L12—2.** $\mathfrak{S}_i$ sei eine offene Formel, in der ‚x', aber nicht ‚y', als freie Variable vorkommt. $\mathfrak{S}_i'$ entstehe aus $\mathfrak{S}_i$ durch Einsetzung von ‚y' für ‚x'. Dann gelten die folgenden Behauptungen (analoge Behauptungen gelten für beliebige andere Individualvariable).

a. $\mathfrak{S}_j$ bestehe aus einem Alloperator ‚(x)' und $\mathfrak{S}_i$ als Operanden, ebenso $\mathfrak{S}_j'$ aus ‚(y)' und $\mathfrak{S}_i'$ als Operanden. Dann sind $\mathfrak{S}_j$ und $\mathfrak{S}_j'$ L-äquivalent.

Beweis. $\mathfrak{B}_j$ sei eine beliebige Bewertung, die $\mathfrak{S}_j$ wahrmacht. Dann erfüllt (nach Auswertungsregel R1g) $\mathfrak{B}_j$ zusammen mit einer beliebigen Bewertung $\mathfrak{B}_x$ für ‚x' $\mathfrak{S}_i$. Daher erfüllt $\mathfrak{B}_j$ zusammen mit einer beliebigen Bewertung für ‚y' $\mathfrak{S}_i'$. Daher erfüllt $\mathfrak{B}_j$ $\mathfrak{S}_j'$. Die Umkehrung ergibt sich analog.

b. $\mathfrak{S}_j$ bestehe aus ‚$(\exists\, x)$' und $\mathfrak{S}_i$ als Operanden, $\mathfrak{S}_j'$ aus ‚$(\exists\, y)$' und $\mathfrak{S}_i'$. Dann sind $\mathfrak{S}_j$ und $\mathfrak{S}_j'$ L-äquivalent. (Analog zu (a).)

Dieser Lehrsatz erlaubt die folgende Operation, die man Umschreibung einer gebundenen Variablen nennt. Wenn eine All- oder Existenzformel gegeben ist, so darf man die Variable des Operators in diesem Operator und überall, wo sie im Operanden als freie Variable vorkommt, durch eine beliebige andere Variable ersetzen, die im ursprünglichen Operanden nicht vorkommt. Das Ergebnis der Umschreibung ist L-äquivalent zur ursprünglichen Formel. Dies ist vollkommen plausibel, da ja z. B. ‚$(x)\ Px$' und ‚$(y)\ Py$' genau dasselbe besagen, nämlich, daß jedes Individuum P ist. Auf Grund des Lehrsatzes der Ersetzung, den wir später aufstellen werden (L15—3), darf die Umschreibung auch auf eine Formel angewendet werden, die in beliebiger Weise als Teil einer andern Formel vorkommt.

13. Lehrsätze über Operatoren

In diesem Paragraphen werden wir Lehrsätze über Operatoren, meist Alloperatoren, aufstellen, besonders solche, die besagen, daß gewisse Umformungen in bezug auf Alloperatoren zulässig sind. Hierbei ist es wichtig, zwischen solchen Umformungen, die in beliebigen Ableitungen gestattet sind, und solchen, die nur in Beweisen erlaubt sind, zu unterscheiden. Wenn ein Lehrsatz besagt, daß eine Formel $\mathfrak{S}_i$ eine andere Formel $\mathfrak{S}_j$ L-impliziert, so lernen wir daraus, daß der Schritt von $\mathfrak{S}_i$ zu $\mathfrak{S}_j$ überall in Ableitungen zulässig ist. Insbesondere ist er natürlich auch in Beweisen zulässig; denn wenn $\mathfrak{S}_i$ L-wahr ist, so auch $\mathfrak{S}_j$ (L6—1a). Wenn aber anderseits ein Lehrsatz nur die schwächere Behauptung macht,

daß, wenn $\mathfrak{S}_i$ L-wahr ist, auch $\mathfrak{S}_j$ L-wahr ist, so können wir hieraus nur entnehmen, daß der Schritt von $\mathfrak{S}_i$ zu $\mathfrak{S}_j$ überall in Beweisen zulässig ist, aber nicht allgemein in Ableitungen.

L13—1. $\mathfrak{S}_x$ sei eine beliebige Satzformel, in der ‚x' frei vorkommt. $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}_x)$ und $\mathfrak{E}(\mathfrak{S}_x)$ seien aus $\mathfrak{S}_x$ gebildet durch Voranstellen des Operators ‚(x)' bzw. ‚$(\exists\, x)$'. $\mathfrak{S}_a$ entstehe aus $\mathfrak{S}_x$ durch Einsetzung von ‚a' für ‚x'. Dann gilt Folgendes (Analoges gilt für beliebige andere Individualvariable und Individualkonstanten).

a. $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}_x) \supset \mathfrak{S}_x$ ist L-wahr. (S. die Überlegung am Anfang von **10a.**)

+b. $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}_x)$ L-impliziert $\mathfrak{S}_x$. (Aus (a) und L6—4.)

c. $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}_x) \supset \mathfrak{S}_a$ ist L-wahr. (Aus (a) und L12—1a.)

+d. $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}_x)$ L-impliziert $\mathfrak{S}_a$. (Aus (c) und L6—4.)

+e. Wenn $\mathfrak{S}_x$ L-wahr ist, so auch $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}_x)$. (Nach Regel R11—1g).

f. Wenn $\mathfrak{S}_x$ L-wahr ist, so auch $\mathfrak{S}_a$. (Aus L12—1a.)

g. Wenn $\mathfrak{S}_a$ L-wahr ist und ‚a' in $\mathfrak{S}_x$ nicht vorkommt, so ist auch $\mathfrak{S}_x$ L-wahr.

B e w e i s. Die Bedingungen seien erfüllt. Dann macht jede Bewertung für ‚a' (zusammen mit beliebigen Bewertungen für die übrigen bewertbaren Zeichen) $\mathfrak{S}_a$ wahr. Daher macht jede Bewertung für ‚x' $\mathfrak{S}_x$ wahr, weil ‚a' in $\mathfrak{S}_a$ an genau den Stellen vorkommt, an denen ‚x' in $\mathfrak{S}_x$ frei vorkommt. Daher ist $\mathfrak{S}_x$ L-wahr. — Die Bedingung, daß ‚a' in $\mathfrak{S}_x$ nicht vorkommen darf, kann nicht weggelassen werden. Das ersieht man aus folgendem Gegenbeispiel. $\mathfrak{S}_x$ sei ‚$Px \supset Pa$'; dann ist $\mathfrak{S}_a$ ‚$Pa \supset Pa$'. Letztere Formel ist L-wahr. Aber ‚$Px \supset Pa$' ist nicht L-wahr (denn es ist falsch für eine Bewertung, bei der x, aber nicht a zur Klasse P gehört).

h. Wenn $\mathfrak{S}_a$ L-wahr ist und ‚a' in $\mathfrak{S}_x$ nicht vorkommt, so ist auch $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}_x)$ L-wahr. (Aus (g) und (e).)

+i. $\mathfrak{S}_x$ L-impliziert $\mathfrak{E}(\mathfrak{S}_x)$. (Aus Regel R11—1h.)

j. $\mathfrak{S}_x \supset \mathfrak{E}(\mathfrak{S}_x)$ ist L-wahr. (Aus (i) und L6—4.)

k. $\mathfrak{S}_a \supset \mathfrak{E}(\mathfrak{S}_x)$ ist L-wahr. (Aus (j) und L12—1a.)

+l. $\mathfrak{S}_a$ L-impliziert $\mathfrak{E}(\mathfrak{S}_x)$. (Aus (k).)

Man beachte, daß im allgemeinen $\mathfrak{S}_x \supset \mathfrak{S}_a$ nicht L-wahr ist und $\mathfrak{S}_x$ $\mathfrak{S}_a$ nicht L-impliziert. So ist z. B. (mit ‚Px' für $\mathfrak{S}_x$) ‚$Px \supset Pa$' nicht L-wahr (s. Bemerkung am Ende des Beweises für L1g.)

Aus den genannten Ergebnissen geht hervor, daß die folgenden Umformungen in A b l e i t u n g e n und daher in Beweisen stets zulässig sind: Weglassen eines Alloperators (b); dasselbe zusammen mit Einsetzung (d) („Spezialisierung"); Voranstellen eines Existenzoperators (i); Verwandlung einer Individualkonstanten in eine Variable und Voranstellung des Existenzoperators (l) („Existenzschluß"). Dagegen sind die folgenden Umformungen zwar stets in B e w e i s e n zulässig, aber nicht allgemein in Ableitungen: Voranstellen eines Alloperators (e); Einsetzung (f); Verwandlung einer Individualkonstanten an allen Stellen in eine Variable (g).

L13—2. Leerlaufender Operator. $\mathfrak{S}_j$ bestehe aus einem All- oder Existenzoperator und $\mathfrak{S}_i$ als Operanden. Die Variable des Operators komme in $\mathfrak{S}_i$ nicht frei vor. Dann sind $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ L-äquivalent. (Aus den Zusätzen zu den Regeln R11—1g und h.)

Hiernach darf ein leerlaufender Operator nach Belieben hinzugefügt oder weggelassen werden.

L13—3. $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ seien beliebige Formeln. $\mathfrak{A}_k$ sei ein Alloperator oder eine Reihe von mehreren Alloperatoren. Dann gilt Folgendes.

+a. $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i\,.\,\mathfrak{S}_j)$ ist L-äquivalent mit $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i)\,.\,\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_j)$.

Beweis. $\mathfrak{B}_{ij}$ sei eine Bewertung für die bewertbaren Zeichen in $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i\,.\,\mathfrak{S}_j)$. $\mathfrak{B}_i$ sei der Teil von $\mathfrak{B}_{ij}$, der sich auf die bewertbaren Zeichen von $\mathfrak{S}_i$ bezieht; ebenso $\mathfrak{B}_j$ der Teil für $\mathfrak{S}_j$ ($\mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{B}_j$ mögen überlappen); also ist $\mathfrak{B}_{ij}$ die Vereinigung $\mathfrak{B}_i + \mathfrak{B}_j$. Angenommen, $\mathfrak{B}_{ij}$ macht $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i\,.\,\mathfrak{S}_j)$ wahr. Dann macht (nach Auswertungsregel R11—1g) $\mathfrak{B}_{ij}$ zusammen mit jeder beliebigen Bewertung für die Variablen in $\mathfrak{A}_k$ $\mathfrak{S}_i\,.\,\mathfrak{S}_j$ wahr und daher sowohl $\mathfrak{S}_i$ als $\mathfrak{S}_j$ wahr (R11—1e). Daher macht $\mathfrak{B}_i$ zusammen mit einer beliebigen Bewertung für die Variablen in $\mathfrak{A}_k$ $\mathfrak{S}_i$ wahr. Also macht $\mathfrak{B}_i$ allein $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i)$ wahr (nach R11—1g). In analoger Weise macht $\mathfrak{B}_j$ $\mathfrak{A}_k(\mathfrak{S}_j)$ wahr. Also macht $\mathfrak{B}_{ij}$ $\mathfrak{A}_k(\mathfrak{S}_i)\,.\,\mathfrak{A}_k(\mathfrak{S}_j)$ wahr. In ähnlicher Weise ergibt sich die Umkehrung: Wenn $\mathfrak{B}_{ij}$ die letztgenannte Formel wahr macht, so auch $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i\,.\,\mathfrak{S}_j)$.

b. Hilfssatz. $\mathfrak{A}_k\,[(\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j)\,.\,\mathfrak{S}_i]$ L-impliziert $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_j)$.

Beweis. Angenommen, $\mathfrak{B}_i$ erfülle die erste Formel. Dann erfüllt (nach R11—1g) $\mathfrak{B}_i$ zusammen mit jeder beliebigen Bewertung für die Variablen in $\mathfrak{A}_k$ $(\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j)\,.\,\mathfrak{S}_i$ und daher auch $\mathfrak{S}_j$, weil diese Formel von jener L-impliziert wird (L8—2d (3)). Also erfüllt $\mathfrak{B}_i$ $\mathfrak{A}_k(\mathfrak{S}_j)$.

c. $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j) \supset [\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i) \supset \mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_j)]$ ist L-wahr.

Beweis. $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j)\,.\,\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i)$ ist L-äquivalent mit $\mathfrak{A}_k\,[(\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j)\,.\,\mathfrak{S}_i]$ (nach (a)) und L-impliziert daher $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_j)$ (nach (b)). Also ist $[\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j)\,.\,\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i)] \supset \mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_j)$ L-wahr (nach L6—4). Hieraus folgt die Behauptung nach L8—6 l (1).

+d. $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j)$ L-impliziert $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i) \supset \mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_j)$. (Aus (c).)

e. Wenn $\mathfrak{S}_i$ $\mathfrak{S}_j$ L-impliziert, so L-impliziert $\mathfrak{A}_k(\mathfrak{S}_i)$ $\mathfrak{A}_k(\mathfrak{S}_j)$.

Beweis. Wenn die Bedingung erfüllt ist, so ist $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j$ L-wahr (nach L6—4), also auch $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j)$ nach (L1e), also auch $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i) \supset \mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_j)$ (nach (d)). Hieraus Behauptung nach L6—4.

f. Wenn $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ L-äquivalent sind, so auch $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i)$ und $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_j)$. (Aus (e) und L6—6a.)

+g. $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j)$ L-impliziert $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i) \equiv \mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_j)$.

Beweis. Da $\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j$ L-äquivalent ist mit $(\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j)\,.\,(\mathfrak{S}_j \supset \mathfrak{S}_i)$ (nach L8—6f (1)), so ist nach (f) $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_k)$ L-äquivalent mit $\mathfrak{A}_k\,[(\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j)\,.\,(\mathfrak{S}_j \supset \mathfrak{S}_i)]$ und daher nach (a) auch mit $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j)\,.\,\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_j \supset \mathfrak{S}_i)$. Also L-impliziert $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j)$ zunächst die genannte Konjunktion und daher auch jedes ihrer beiden Glieder (nach L6—12c), also nach (d) sowohl $\mathfrak{A}_k(\mathfrak{S}_i) \supset \mathfrak{A}_k(\mathfrak{S}_j)$ als auch $\mathfrak{A}_k(\mathfrak{S}_j) \supset \mathfrak{A}_k(\mathfrak{S}_i)$, daher auch die Konjunktion dieser beiden Formeln (wiederum nach L6—12c) und somit schließlich $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i) \equiv \mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_j)$ (wiederum nach L8—6f (1)).

Die Ergebnisse L3a, d und g sind Distributionsgesetze für einen Alloperator oder eine Reihe von solchen in bezug auf Konjunktion, Implikation und Äquivalenz.

L13—4. $\mathfrak{S}_i$, $\mathfrak{S}_j$ und $\mathfrak{S}_l$ seien beliebige Satzformeln. $\mathfrak{A}_k$ sei ein Alloperator oder eine Reihe von Alloperatoren. Dann gilt Folgendes:

a. $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i)$ ist L-wahr dann und nur dann, wenn $\mathfrak{S}_i$ L-wahr ist. (Aus L1b und e.)

b. $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j$ sei L-wahr. Dann ist auch $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j)$ L-wahr (nach (a)); und ebenfalls $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i) \supset \mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_j)$ (nach L3d). Daher L-impliziert $\mathfrak{A}_k(\mathfrak{S}_i)$ $\mathfrak{A}_k(\mathfrak{S}_j)$.

c. $\mathfrak{S}_i \,.\, \mathfrak{S}_j \supset \mathfrak{S}_k$ sei L-wahr. Dann sind auch die folgenden Formeln L-wahr: $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i \,.\, \mathfrak{S}_j \supset \mathfrak{S}_k)$ (nach (a)), $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i \,.\, \mathfrak{S}_j) \supset \mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_k)$ (nach (b)) und $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i) \,.\, \mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_j) \supset \mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_j)$ (nach L3a). Daher L-implizieren $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i)$ und $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_j)$ zusammen $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_k)$.

d. $\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_k$ sei L-wahr. Dann ist auch $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_k)$ L-wahr (nach (a)) und ebenso $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i) \equiv \mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_j)$ (nach L3g). Daher sind $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i)$ und $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_j)$ L-äquivalent.

L4 ist häufig nützlich in Anwendung auf Formeln tautologischer Form. Z. B., da ‚$p \,.\, q \supset p$‘ tautologisch ist, so sind folgende Formeln L-wahr: ‚$Fx \,.\, Gx \supset Fx$‘, ‚$(x)\,(Fx \,.\, Gx \supset Fx)$‘ und ‚$(x)\,(Fx \,.\, Gx) \supset (x)\, Fx$‘. Daher L-impliziert ‚$(x)\,(Fx \,.\, Gx)$‘ ‚$(x)\,Fx$‘.

L13—5. a. ‚$\sim (x)\,(Fx)$‘ ist L-äquivalent mit ‚$(\exists\, x)\,(\sim Fx)$‘.

Beweis. ‚F‘ ist das einzige bewertbare Zeichen in den beiden Formeln. $\mathfrak{B}_k$ sei eine beliebige Bewertung für ‚F‘, die ‚$\sim (x)\,(Fx)$‘ wahr macht. Dann macht $\mathfrak{B}_k$ ‚$(x)\,(Fx)$‘ falsch (nach Regel R11—1c). Also ist es (nach R11—1g) nicht der Fall, daß $\mathfrak{B}_k$ zusammen mit jeder beliebigen Bewertung für ‚x‘ ‚Fx‘ wahr macht. Also gibt es eine Bewertung $\mathfrak{B}_x$ für ‚x‘ derart, daß $\mathfrak{B}_k + \mathfrak{B}_x$ ‚Fx‘ falsch macht, also (nach R11—1c) ‚$\sim Fx$‘ wahr macht. Also macht $\mathfrak{B}_k$ ‚$(\exists\, x)\,(\sim Fx)$‘ wahr (nach R11—1h). Die Umkehrung ergibt sich in analoger Weise.

b. ‚$(x)\,(p \vee Fx)$‘ ist L-äquivalent mit ‚$p \vee (x)\,Fx$‘.

Beweis. $\mathfrak{B}_k$ sei eine beliebige Bewertung für ‚p‘ und ‚F‘, die ‚$(x)\,(p \vee Fx)$‘ wahr macht. — 1. Angenommen, der Wert von ‚p‘ in $\mathfrak{B}_k$ ist W. Dann macht $\mathfrak{B}_k$ ‚$p \vee (x)\,Fx$‘ wahr (R11—1d). — 2. Angenommen, der Wert von ‚p‘ in $\mathfrak{B}_k$ ist F. Da $\mathfrak{B}_k$ die erste Formel wahr macht, so macht $\mathfrak{B}_k$ zusammen mit jeder beliebigen Bewertung für ‚x‘ ‚$p \vee Fx$‘ wahr (R11—1g), also auch ‚Fx‘ wahr (R11—1d). Also macht $\mathfrak{B}_k$ ‚$(x)\,Fx$‘ wahr (R11—1g), und daher auch ‚$p \vee (x)\,Fx$‘ (R11—1d). — Somit macht jede Bewertung, die die erste Formel wahr macht, auch die zweite Formel wahr. Das Umgekehrte ergibt sich in ähnlicher Weise.

L5a zeigt, daß die Negation eines Allsatzes in einen Existenzsatz mit negiertem Operanden umgeformt werden kann. Nach den früheren Erklärungen (**12a**) darf in den in L5b genannten Formeln für ‚p‘ jede Satzformel eingesetzt werden, in der ‚x‘ nicht frei vorkommt. Dieser Lehrsatz gestattet, einen Alloperator so zu verschieben, daß ein Dis-

junktionsglied des Operanden, in dem die Operatorvariable nicht frei vorkommt, aus dem Operanden ausgeschlossen wird.

14. L-wahre Formeln mit Operatoren

14a. L-wahre Implikationsformeln. Wir stellen hier Listen von L-wahren Formeln mit Operatoren auf, zunächst Implikationsformeln (L1), aus denen auch Ergebnisse über L-Implikationen abzulesen sind, und dann Äquivalenzformeln (L2), die auch Ergebnisse über L-Äquivalenz liefern. Diese Listen dienen hauptsächlich zum Nachschlagen; es ist aber ratsam, sich die mit ‚+' markierten Ergebnisse zu merken, da sie bei der praktischen Arbeit häufig verwendet werden. Die Verwendung der hier aufgeführten Implikations- und Äquivalenzformeln ist oft analog zu der der früher angegebenen tautologischen Formeln (L8—2 und L8—6).

L14—1. $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j$ sei irgend eine der unten angeführten Implikationsformeln (a) (1) bis (k). $\mathfrak{S}_i' \supset \mathfrak{S}_j'$ sei aus ihr durch beliebige Einsetzungen gebildet. $\mathfrak{A}_k$ sei ein Alloperator oder eine Reihe von mehreren Alloperatoren. Dann gilt Folgendes:

A. $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j$ ist L-wahr.
B. $\mathfrak{S}_i$ L-impliziert $\mathfrak{S}_j$. (Aus (A).)
C. $\mathfrak{S}_i' \supset \mathfrak{S}_j'$ ist L-wahr. (Aus (A) nach L12—1a.)
D. $\mathfrak{S}_i'$ L-impliziert $\mathfrak{S}_j'$. (Aus (C).)
E. $\mathfrak{A}_k (\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j)$ ist L-wahr. ((E), (F) und (G) folgen aus (A) nach L13—4b.)
F. $\mathfrak{A}_k (\mathfrak{S}_i) \supset \mathfrak{A}_k (\mathfrak{S}_j)$ ist L-wahr.
G. $\mathfrak{A}_k (\mathfrak{S}_i)$ L-impliziert $\mathfrak{A}_k (\mathfrak{S}_j)$.
H. Die vorkommenden gebundenen Variablen dürfen durch beliebige andere ersetzt werden. (Nach L12—2.)

Einige der unten genannten Formeln haben die Form $\mathfrak{S}_k \,.\, \mathfrak{S}_l \supset \mathfrak{S}_j$. $\mathfrak{S}_k' \,.\, \mathfrak{S}_l' \supset \mathfrak{S}_j'$ sei hieraus durch beliebige Einsetzungen gebildet. In diesen Fällen gilt auch noch Folgendes (nach L13—4c).

I. Die Klasse der Formeln $\mathfrak{S}_k$ und $\mathfrak{S}_l$ L-impliziert $\mathfrak{S}_j$.
J. Die Klasse der Formeln $\mathfrak{S}_k'$ und $\mathfrak{S}_l'$ L-impliziert $\mathfrak{S}_j'$.
K. Die Klasse der Formeln $\mathfrak{A}_k (\mathfrak{S}_k)$ und $\mathfrak{A}_k (\mathfrak{S}_l)$ L-impliziert $\mathfrak{A}_k (\mathfrak{S}_j)$.
L. Die Klasse der Formeln $\mathfrak{A}_k (\mathfrak{S}_k')$ und $\mathfrak{A}_k (\mathfrak{S}_l')$ L-impliziert $\mathfrak{A}_k (\mathfrak{S}_j')$.

+ **a.** Gesetz der Spezialisierung.
(1) $(x)(Fx) \supset Fx$. (Aus L13—1a.)
(2) $(x)(Fx) \supset Fy$. (Aus (1) nach L12—1a.)

b. Gesetz des Existenzschlusses.
(1) $Fx \supset (\exists x) Fx$. (Aus L13—1j.)
(2) $Fy \supset (\exists x) Fx$. (Aus (1) nach L12—1a.)

c. $(x) Fx \supset (\exists x) Fx$. (Aus (a)(1) und (b)(1) nach L8—2f(6).)

d. + (1) $(x)\,(Fx \supset Gx) \supset [(x)\,Fx \supset (x)\,Gx]$. (Aus L13—3c.)
+ (2) $(x)\,(Fx \supset Gx)\,.\,(x)\,Fx \supset (x)\,Gx$. (Aus (1) nach L8—6 l (1).)
(3) $(x)\,Fx \supset [(x)\,(Fx \supset Gx) \supset (x)\,Gx]$. (Aus (1) nach L8—6 l (2).)
+ (4) $(x)\,(Fx \supset Gx)\,.\,(\exists\, x)\,Fx \supset (\exists\, x)\,Gx$.
(5) $(x)\,(Fx \supset Gx) \supset [(\exists\, x)\,Fx \supset (\exists\, x)\,Gx]$. (Aus (4) nach L8—6 l (1).)
(6) $(\exists\, x)\,Fx \supset [(x)\,(Fx \supset Gx) \supset (\exists\, x)\,Gx]$. (Aus (5) nach L8—6 l (2).)

e. + (1) $(x)\,(Fx \equiv Gx) \supset (x)\,(Fx \supset Gx)$. (Aus L8—2e (1) und L13—4b.)
(2) $(x)\,(Fx \equiv Gx) \supset (x)\,(Gx \supset Fx)$. (Aus L8—2e (2) und L13—4b.)
(3) $(x)\,(Fx \equiv Gx) \supset [(x)\,Fx \supset (x)\,Gx]$. (Aus (1) und (d) (1).)
+ (4) $(x)\,(Fx \equiv Gx)\,.\,(x)\,Fx \supset (x)\,Gx$. (Aus (3) nach L8—6 l (1).)
(5) $(x)\,Fx \supset [(x)\,(Fx \equiv Gx) \supset (x)\,Gx]$. (Aus (3) nach L8—6 l (2).)
(6) $(x)\,(Fx \equiv Gx) \supset [(x)\,Gx \supset (x)\,Fx]$. (Aus (2) und (d) (1).)
(7) $(x)\,(Fx \equiv Gx)\,.\,(x)\,Gx \supset (x)\,Fx$. (Aus (6) nach L8—6 l (1).)
(8) $(x)\,Gx \supset [(x)\,(Fx \equiv Gx) \supset (x)\,Fx]$. (Aus (6) nach L8—6 l (2).)
+ (9) $(x)\,(Fx \equiv Gx) \supset [(x)\,Fx \equiv (x)\,Gx]$. (Aus L13—3g.)

f. (1) $(x)\,(Fx \equiv Gx) \supset [(\exists\, x)\,Fx \supset (\exists\, x)\,Gx]$. (Aus (e) (1) und (d) (5).)
(2) $(x)\,(Fx \equiv Gx)\,.\,(\exists\, x)\,Fx \supset (\exists\, x)\,Gx$. (Aus (1) nach L8—6 l (1).)
(3) $(\exists\, x)\,Fx \supset [(x)\,(Fx \equiv Gx) \supset (\exists\, x)\,Gx]$. (Aus (1) nach L8—6 l (2).)
(4) $(x)\,(Fx \equiv Gx) \supset [(\exists\, x)\,Gx \supset (\exists\, x)\,Fx]$. (Aus (e) (2) und (d) (5).)
(5) $(x)\,(Fx \equiv Gx) \supset [(\exists\, x)\,Fx \equiv (\exists\, x)\,Gx]$. (Aus (1), (4) und L8—6 f (1).)

g. + (1) $(\exists\, x)\,(Fx\,.\,Gx) \supset (\exists\, x)\,Fx\,.\,(\exists\, x)\,Gx$.
+ (2) $(\exists\, x)\,(Fx\,.\,Gx) \supset (\exists\, x)\,Fx$. (Aus (1).)
(3) $(\exists\, x)\,(Fx\,.\,Gx) \supset (\exists\, x)\,Gx$. (Aus (1).)

h. (1) $(x)\,Fx\,.\,(\exists\, x)\,Gx \supset (\exists\, x)\,(Fx\,.\,Gx)$.
(2) $(x)\,Fx \supset [(\exists\, x)\,Gx \supset (\exists\, x)\,(Fx\,.\,Gx)]$. (Aus (1) nach L8—6 l (1).)

i. (1) $(x)\,Fx \vee (x)\,Gx \supset (x)\,(Fx \vee Gx)$.
(2) $(x)\,(Fx \vee Gx) \supset (\exists\, x)\,Fx \vee (x)\,Gx$.
(3) $(x)\,(Fx \vee Gx) \supset (x)\,Fx \vee (\exists\, x)\,Gx$. (Aus (2).)

j. Syllogismus.

+(1) $[(x)(Fx \supset Gx) . (x)(Gx \supset Hx)] \supset (x)(Fx \supset Hx)$.

(2) $(x)(Fx \supset Gx) \supset [(x)(Gx \supset Hx) \supset (x)(Fx \supset Hx)]$. (Aus (1) nach L8—6 l (1).)

(3) $(x)(Gx \supset Hx) \supset [(x)(Fx \supset Gx) \supset (x)(Fx \supset Hx)]$. (Aus (2) nach L8—6 l (2).)

+(4) $[(x)(Fx \supset Gx) . (\exists x)(Fx . Hx)] \supset (\exists x)(Gx . Hx)$.

(5) $(x)(Fx \supset Gx) \supset [(\exists x)(Fx . Hx) \supset (\exists x)(Gx . Hx)]$. (Aus (4) nach L8—6 l (1).)

(6) $(\exists x)(Fx . Hx) \supset [(x)(Fx \supset Gx) \supset (\exists x)(Gx . Hx)]$. (Aus (5) nach L8—6 l (2).)

+**k.** Vertauschung von zwei ungleichen Operatoren.

$(\exists x)(y) Kxy \supset (y)(\exists x) Kxy$.

Für einige der vorstehenden Formeln wird auf Lehrsätze verwiesen, die früher, meist in **13**, bewiesen worden sind. Beweise für die Formeln, bei denen keine Hinweise gegeben sind, können leicht in ähnlicher Weise auf Grund der Regeln R11—1g und h aufgestellt werden.

Bemerkungen zu den Lehrsätzen L1. Über die Verwendung der Formeln (a) und (b) s. die früheren Bemerkungen zu L13—1. — Nach (c) kann man aus einem Allsatz auf den entsprechenden Existenzsatz schließen. Dies ist zulässig, weil im vorliegenden System, wie meist üblich, nur nicht-leere Individuenbereiche in Betracht gezogen werden. — (d) (1) erlaubt die sogenannte Distribution eines Alloperators auf die Glieder einer Implikation. — (d) (4): Wenn das erste Glied einer universellen Implikation, z. B. eines Naturgesetzes, von mindestens einem Individuum erfüllt wird, so auch das zweite Glied (nämlich von demselben Individuum). — (e) (1): Aus einer universellen Äquivalenz folgt die universelle Implikation. — (e) (9) gestattet die Distribution eines Alloperators auf die Glieder einer Äquivalenz; daraus folgen dann auch die beiden Implikationen ((e) (3) und (6)). — (f) (2): Wenn das erste Glied einer universellen Äquivalenz erfüllt ist, so auch das zweite. — (g) (1): Distribution des Existenzoperators auf die Glieder einer Konjunktion. (Hier gilt der Schluß nur in einer Richtung, bei der Disjunktion dagegen in beiden Richtungen, s. unten L2—c (2).) — Die Formeln (j) enthalten drei Prädikatvariable. (j) (1) ist der bekannte Schluß, der in der traditionellen Logik Modus Barbara genannt wird. — (j) (4): Wenn alle F G sind und F zusammen mit H vorkommt, so kommt auch G zusammen mit H vor (nämlich bei demselben Individuum). — Zu (k): Ein Satz der Form ‚$(\exists x)(y) Kxy$' ist ein absoluter Existenzsatz; er besagt: „Es gibt ein Individuum x, das zu jedem Individuum y in der Relation K steht". Dagegen ist ein Satz der Form ‚$(y)(\exists x) Kxy$' schwächer; er ist ein relativer Existenzsatz, der Folgendes besagt: „Für jedes y gibt es ein Individuum x, das zu ihm in der Relation K steht". Aus einem absoluten Existenzsatz kann man den entsprechenden relativen erschließen. Denn wenn es ein Individuum gibt, etwa b, das zu allen in K steht, so gibt es offenbar zu jedem Individuum eines (nämlich b), das zu

ihm in K steht. Anderseits kann aus einem relativen Existenzsatz im allgemeinen der absolute nicht erschlossen werden. Denn der relative Satz besagt nur, daß es für jedes y ein x gibt, das zu ihm in K steht; für verschiedene Individuen y mögen aber diese Individuen x verschieden sein, so daß es keines gibt, das zu allen in K steht. Z. B. ist im Bereich der natürlichen Zahlen der relative Existenzsatz ‚$(y)\,(\exists\, x)\, Gr\,(x, y)$' wahr, weil es zu jeder Zahl eine größere gibt; aber der absolute Existenzsatz ‚$(\exists\, x)\,(y)\, Gr\,(x, y)$' ist falsch, denn er besagt, daß es eine Zahl gibt, die größer als alle Zahlen ist. (Für die Vertauschung zweier gleicher Operatoren gilt dagegen L-Äquivalenz, s. unten L2g.)

14b. L-wahre Äquivalenzformeln.

L14—2. $\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j$ sei irgend eine der unten angeführten Äquivalenzformeln (a) (1) bis (h) (2). $\mathfrak{S}_i' \equiv \mathfrak{S}_j'$ sei aus ihr durch beliebige Einsetzungen gebildet. $\mathfrak{A}_k$ sei ein Alloperator oder eine Reihe von mehreren Alloperatoren. Dann gilt folgendes.

A. $\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j$ ist L-wahr.

B. $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ sind L-äquivalent. (Aus (A).)

C. $\mathfrak{S}_i' \equiv \mathfrak{S}_j'$ ist L-wahr. (Aus (A) nach L12—1a.)

D. $\mathfrak{S}_i'$ und $\mathfrak{S}_j'$ sind L-äquivalent. (Aus (C).)

E. $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ sind gegenseitig L-ersetzbar. Dies folgt aus (B), wie später gezeigt werden wird, s. L15—3g.

F. $\mathfrak{S}_i'$ und $\mathfrak{S}_j'$ sind gegenseitig L-ersetzbar. (Aus (D).)

G. $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j)$ ist L-wahr. Ebenso mit $\mathfrak{S}_i'$ und $\mathfrak{S}_j'$. ((G), (H) und (I) folgen aus (A) nach L13—4d.)

H. $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i) \equiv \mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_j)$ ist L-wahr. Ebenso mit $\mathfrak{S}_i'$ und $\mathfrak{S}_j'$.

I. $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_i)$ und $\mathfrak{A}_k\,(\mathfrak{S}_j)$ sind L-äquivalent. Ebenso mit $\mathfrak{S}_i'$ und $\mathfrak{S}_j'$.

K. Die vorkommenden gebundenen Variablen dürfen durch beliebige andere ersetzt werden. (Nach L12—2.)

a. Gesetze der Negation.

+(1) $\sim (x)\, Fx \equiv (\exists\, x) \sim Fx$. (Aus L13—5a.)

+(2) $\sim (\exists\, x)\, Fx \equiv (x) \sim Fx$. (Aus (1) nach L8—6i (5), mit Einsetzung von ‚$\sim Fx$' für ‚Fx'.)

+(3) $(x)\, Fx \equiv\, \sim (\exists\, x) \sim Fx$. (Aus (1) nach L8—6i (5).)

+(4) $(\exists\, x)\, Fx \equiv\, \sim (x) \sim Fx$. (Aus (1) durch Einsetzung von ‚$\sim Fx$' für ‚Fx'.)

(5) $\sim (x)\,(Fx \supset Gx) \equiv (\exists\, x)\,(Fx \,.\, \sim Gx)$. (Aus (1) und L8—6h (1).)

(6) $\sim (x)\,(Fx \supset\, \sim Gx) \equiv (\exists\, x)\,(Fx \,.\, Gx)$. (Aus (5).)

(7) $\sim (\exists\, x)\,(Fx \,.\, Gx) \equiv (x)\,(Fx \supset\, \sim Gx)$. (Aus (6) nach L8—6i (5).)

(8) $\sim (\exists\, x)\,(Fx \,.\, \sim Gx) \equiv (x)\,(Fx \supset Gx)$. (Aus (5) nach L8—6i (5).)

b. Gesetze der Negation für mehrere gleiche Operatoren. (Jede der folgenden Formeln enthält, durch Punkte angedeutet, eine Reihe von n Alloperatoren ($n \geqq 2$) und eine Reihe von n Existenzoperatoren mit denselben Variablen; ‚K' ist eine n-stellige Prädikatvariable; dahinter steht die Reihe der n Individualvariablen.) (Diese vier Formeln sind analog zu (a) (1) bis (4).)

(1) $\sim (x) \ldots (z) \left(Kx \ldots z\right) \equiv (\exists\, x) \ldots (\exists\, z) \left(\sim Kx \ldots z\right)$.
(2) $\sim (\exists\, x) \ldots (\exists\, z) \left(Kx \ldots z\right) \equiv (x) \ldots (z) \left(\sim Kx \ldots z\right)$.
(3) $(x) \ldots (z) \left(Kx \ldots z\right) \equiv \sim (\exists\, x) \ldots (\exists\, z) \left(\sim Kx \ldots z\right)$.
(4) $(\exists\, x) \ldots (\exists\, z) \left(Kx \ldots z\right) \equiv \sim (x) \ldots (z) \left(\sim Kx \ldots z\right)$.

c. Distributionsgesetze.

+(1) $(x) \left(Fx \,.\, Gx\right) \equiv (x)\, Fx \,.\, (x)\, Gx$. (Aus L13—3a.)
+(2) $(\exists\, x) \left(Fx \vee Gx\right) \equiv (\exists\, x)\, Fx \vee (\exists\, x)\, Gx$. (Aus (1), (a) (4), L8—6g (1) und g (3).)

d. Verschiebung eines Alloperators. (Nach den früheren Erklärungen (**12a**) darf in den Formeln (d), (e) und (f) für ‚p' jede Satzformel eingesetzt werden, in der ‚x' nicht frei vorkommt.)

(1) $(x) \left(p \vee Fx\right) \equiv p \vee (x)\, Fx$. (Aus L13—5b.)
(2) $(x) \left(Fx \vee p\right) \equiv (x) \left(Fx\right) \vee p$. (Aus (1).)
(3) $(x) \left(p \,.\, Fx\right) \equiv p \,.\, (x)\, Fx$. (Analog zu L13—5b.)
(4) $(x) \left(Fx \,.\, p\right) \equiv (x) \left(Fx\right) .\, p$. (Aus (3).)
(5) $(x) \left(p \supset Fx\right) \equiv \left[p \supset (x)\, Fx\right]$. (Aus (1) nach L8—6j (1).)

e. Verschiebung eines Existenzoperators.

(1) $(\exists\, x) \left(p \vee Fx\right) \equiv p \vee (\exists\, x)\, Fx$. (Analog zu L13—5b.)
(2) $(\exists\, x) \left(Fx \vee p\right) \equiv (\exists\, x) \left(Fx\right) \vee p$. (Aus (1).)
(3) $(\exists\, x) \left(p \,.\, Fx\right) \equiv p \,.\, (\exists\, x)\, Fx$. (Analog zu L13—5b.)
(4) $(\exists\, x) \left(Fx \,.\, p\right) \equiv (\exists\, x) \left(Fx\right) .\, p$. (Aus (3).)
(5) $(\exists\, x) \left(p \supset Fx\right) \equiv \left[p \supset (\exists\, x)\, Fx\right]$. (Aus (1) nach L8—6j (1).)

f. Verschiebung und Änderung eines Operators.

(1) $(x) \left(Fx \supset p\right) \equiv \left[(\exists\, x) \left(Fx\right) \supset p\right]$. (Aus L8—6j(1), (d) (2) und (a) (2).)
(2) $(\exists\, x) \left(Fx \supset p\right) \equiv \left[(x) \left(Fx\right) \supset p\right]$. (Analog zu (1).)

g. Vertauschung zweier gleicher Operatoren.

+(1) $(x)\, (y)\, Kxy \equiv (y)\, (x)\, Kxy$. (Aus R11—1g.)
+(2) $(\exists\, x)\, (\exists\, y)\, Kxy \equiv (\exists\, y)\, (\exists\, x)\, Kxy$. (Aus R11—1h.)

h. Permutation von n gleichen Operatoren ($n > 2$). (Die Punkttripel deuten an wie in (b). Auf der rechten Seite stehen dieselben Operatoren wie auf der linken, aber in einer beliebig geänderten Reihenfolge.)

(1) $(x) \ldots (z) \left(Kx \ldots z\right) \equiv .. (z) .. (x) .. \left(Kx \ldots z\right)$. (Aus R11—1g.)
(2) $(\exists\, x) \ldots (\exists\, z) \left(Kx \ldots z\right) \equiv .. (\exists\, z) .. (\exists\, x) .. \left(Kx \ldots z\right)$. (Aus R11—1h.)

Bemerkungen zu den Lehrsätzen L2. (a) (1) und (2) zeigen, wie die Negation einer Allformel bzw. einer Existenzformel umgeformt werden kann: man verschiebt das Negationszeichen hinter den Operator und verwandelt den Operator in den entgegengesetzten. Diese Umformungen sind unmittelbar plausibel (vgl. **9b**). Für endliche Bereiche entsprechen sie den Gesetzen von De Morgan (L8—6g), wie folgende Überlegung zeigt. Angenommen, es gehe aus den Regeln eines gegebenen Sprachsystems hervor, daß der Individuenbereich nur eine feste endliche Anzahl n von Individuen umfaßt, die durch die Individualkonstanten ‚a_1', ‚a_2', . . ., ‚a_n' bezeichnet sind. In diesem System besagt dann der Allsatz ‚$(x)\ Px$' dasselbe wie die n-gliedrige Konjunktion ‚$Pa_1 \,.\, Pa_2 \,.\, \ldots \,.\, Pa_n$', und der Existenzsatz ‚$(\exists\, x)\ Px$' besagt dasselbe wie die Disjunktion ‚$Pa_1 \vee Pa_2 \vee \ldots \vee Pa_n$'. Somit wird hier ‚$\sim (x)\ Px$' zu ‚$\sim (Pa_1 \,.\, Pa_2 \,.\, \ldots \,.\, Pa_n)$', das (nach L8—6g (4)) L-äquivalent ist mit der Formel ‚$\sim Pa_1 \vee \sim Pa_2 \vee \ldots \vee \sim Pa_n)$', die der Formel ‚$(\exists\, x) \sim Px$' entspricht. — (a) (3) zeigt die Möglichkeit, den Alloperator auf Grund des Existenzoperators zu definieren; (a) (4) zeigt die Möglichkeit der umgekehrten Definition. — (a) (5) lehrt die Umformung der Negation einer universellen Implikation. — (a) (8) zeigt, daß eine universelle Implikation, z. B. ein Naturgesetz, dasselbe besagt wie ein gewisser negierter Existenzsatz; „Alle Raben sind schwarz" bedeutet soviel wie „Es gibt keinen nichtschwarzen Raben". — Die Formeln (b) sind ähnlich zu (a) (1) bis (4): eine ununterbrochene Reihe von zwei oder mehreren gleichen Operatoren verhält sich ähnlich wie ein einzelner Operator. — (c) (1) erlaubt die Distribution eines Alloperators auf die Glieder einer Konjunktion, (c) (2) die eines Existenzoperators auf die Glieder einer Disjunktion. [Hier gilt L-Äquivalenz; d. h. die Umformung ist in beiden Richtungen zulässig. Dagegen ist die Distribution eines Alloperators auf die Glieder einer Implikation oder einer Äquivalenz nur in Einer Richtung zulässig (L1d (1) und (e) (9)).] — (d) erlaubt die Verschiebung eines Alloperators in gewissen Fällen: eine Satzformel, in der die Operatorvariable nicht frei vorkommt, darf nach Belieben in den Operanden einbegriffen oder von ihm ausgeschlossen werden, wenn sie das erste oder zweite Glied einer Disjunktion oder einer Konjunktion oder das erste Glied einer Implikation ist. — (e) erlaubt die Verschiebung eines Existenzoperators in den gleichen Fällen. Im Gegensatz hierzu besagt (f), daß, wenn die betreffende Satzformel das zweite Glied einer Implikation ist, der Operator nicht einfach verschoben werden darf, sondern dabei in den entgegengesetzten verwandelt werden muß. (f) (1) besagt z. B., daß die Formeln L-äquivalent sind, die den folgenden beiden Formulierungen in Wortsprache für den Bereich der Einwohner von Sodom entsprechen: „Für jeden Einwohner von Sodom gilt, daß, wenn er gerecht ist, Sodom verschont wird" und „Wenn mindestens ein Einwohner von Sodom gerecht ist, so wird Sodom verschont". — (f) (2) wird selten angewendet; der Operand eines Existenzoperators hat meist die Form einer Konjunktion, nur selten die einer Implikation. — (g) und (h) zeigen, daß die Reihenfolge von zwei oder mehreren gleichen Operatoren nach Belieben geändert werden darf.

14c. Übungen. Man übersetze jeden der folgenden Sätze in die symbolische Sprache, und zwar in zwei Formen, die nach L2a (1) oder (2) L-äquivalent miteinander sind: eine mit Alloperator, die andere mit Existenzoperator. — 1. „Kein (Ding) ist kugelförmig“ ((a) „Es gibt nichts ..“; (b) „Jedes .. nicht ..“). — 2. „0 ist nicht größer als irgend eine (Zahl).“ — 3. „Nicht jede (Zahl) ist größer als 0.“ — 4. „Es gibt eine (Zahl) derart, daß keine (Zahl) kleiner ist als sie.“ — 5. „Für jede (Zahl) x gilt: keine (Zahl) ist sowohl größer als auch kleiner als x.“ — Man übersetze jeden der folgenden Sätze (6) und (7) in die symbolische Sprache, leite aus ihm nach L13—11 einen Existenzsatz ab und übersetze diesen zurück in die Wortsprache: — 6. „Der Mond ist kugelförmig.“ — 7. „2 ist eine Primzahl und gerade.“

15. Definitionen

15a. Ersetzbarkeit. Wir können jetzt Lehrsätze über Ersetzbarkeit aufstellen, die allgemeiner sind als die in **8b**: eine Teilformel kann hier nicht nur als Glied einer Satzverknüpfung vorkommen, sondern auch als Operand.

$\mathfrak{S}_i$, $\mathfrak{S}_j$, $\mathfrak{S}_k$ und $\mathfrak{S}_l$ seien Satzformeln. Wir wollen sagen, daß $\mathfrak{S}_k$ und $\mathfrak{S}_l$ äquivalent in bezug auf $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ sind, wenn $(\,)\,(\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j)$ $(\,)\,(\mathfrak{S}_k \equiv \mathfrak{S}_l)$ L-impliziert, wobei ‚( )‘ eine Reihe von Alloperatoren für sämtliche in dem betreffenden Operanden frei vorkommenden Variablen (ausgenommen Satzvariable) andeutet.

L15—1. $\mathfrak{S}_i$, $\mathfrak{S}_j$ und $\mathfrak{S}_k$ seien beliebige Satzformeln. $\mathfrak{A}$ sei ein beliebiger Alloperator, $\mathfrak{E}$ ein beliebiger Existenzoperator. Jedes der folgenden Paare von Satzformeln ist äquivalent in bezug auf $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$.

a. $\sim \mathfrak{S}_i$ und $\sim \mathfrak{S}_j$. ((a) bis (i) aus L8—3b und L13—3e.)
b. $\mathfrak{S}_i \vee \mathfrak{S}_k$ und $\mathfrak{S}_j \vee \mathfrak{S}_k$.
c. $\mathfrak{S}_k \vee \mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_k \vee \mathfrak{S}_j$.
d. $\mathfrak{S}_i \,.\, \mathfrak{S}_k$ und $\mathfrak{S}_j \,.\, \mathfrak{S}_k$.
e. $\mathfrak{S}_k \,.\, \mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_k \,.\, \mathfrak{S}_j$.
f. $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_k$ und $\mathfrak{S}_j \supset \mathfrak{S}_k$.
g. $\mathfrak{S}_k \supset \mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_k \supset \mathfrak{S}_j$.
h. $\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_k$ und $\mathfrak{S}_j \equiv \mathfrak{S}_k$.
i. $\mathfrak{S}_k \equiv \mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_k \equiv \mathfrak{S}_j$.
j. $\mathfrak{A}\,(\mathfrak{S}_i)$ und $\mathfrak{A}\,(\mathfrak{S}_j)$. (Aus L14—1e (9).)
k. $\mathfrak{E}\,(\mathfrak{S}_i)$ und $\mathfrak{E}\,(\mathfrak{S}_j)$. (Aus L14—1f (5).)

L15—2. Wenn ein Paar von Satzformeln äquivalent in bezug auf ein zweites Paar ist und dieses äquivalent in bezug auf ein drittes, so ist auch das erste Paar äquivalent in bezug auf das dritte. (Aus L6—3b.)

L15—3. Ersetzbarkeit. $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ seien beliebige Satzformeln. $\mathfrak{S}_i'$ sei aus $\mathfrak{S}_i$ und möglicherweise beliebigen andern Formeln mit Hilfe von Verknüpfungszeichen und Operatoren aufgebaut. $\mathfrak{S}_j'$ sei aus $\mathfrak{S}_i'$ gebildet, indem $\mathfrak{S}_i$ an der betreffenden Stelle durch $\mathfrak{S}_j$ ersetzt wird. Dann gilt Folgendes:

a. $\mathfrak{S}_i'$ und $\mathfrak{S}_j'$ sind äquivalent in bezug auf $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$, d. h. $(\,)\,(\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j)$ L-impliziert $(\,)\,(\mathfrak{S}_i' \equiv \mathfrak{S}_j')$.

Beweis. Dies folgt gemäß L2 durch Anwendung geeigneter Teile von L1 zunächst auf die kleinste Teilformel in $\mathfrak{S}_i'$, in der $\mathfrak{S}_i$ an der betreffenden Stelle als Verknüpfungsglied oder Operand vorkommt, und dann Schritt für Schritt auf umfassendere Formeln, bis schließlich zu $\mathfrak{S}_i'$ selbst.

b. $(\,)(\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j) \supset (\,)(\mathfrak{S}_i' \equiv \mathfrak{S}_j')$ ist L-wahr. (Aus (a).)

c. $(\,)(\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j)$ L-impliziert $\mathfrak{S}_i' \equiv \mathfrak{S}_j'$. (Aus (a) und L13—1b.)

d. $(\,)(\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j) \supset (\mathfrak{S}_i' \equiv \mathfrak{S}_j')$ ist L-wahr. (Aus (c).)

e. $(\,)(\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j) \,.\, \mathfrak{S}_i' \supset \mathfrak{S}_j'$ ist L-wahr. (Aus (d) und L8—61(1).)

f. $(\,)(\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j)$ und $\mathfrak{S}_i'$ zusammen L-implizieren $\mathfrak{S}_j'$. (Aus (e).)

+ **g.** Wenn $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ L-äquivalent sind, so sind auch $\mathfrak{S}_i'$ und $\mathfrak{S}_j'$ L-äquivalent.

Beweis. Wenn $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ L-äquivalent sind, so ist $\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j$ L-wahr, also auch $(\,)(\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j)$ (L13—1e), also nach (c) auch $\mathfrak{S}_i' \equiv \mathfrak{S}_j'$. Daher sind $\mathfrak{S}_i'$ und $\mathfrak{S}_j'$ L-äquivalent.

L3g besagt, daß L-äquivalente Satzformeln L-ersetzbar sind, nicht nur in molekularen, sondern auch in generellen Formeln. Hierbei ist es gleichgültig, ob die in $\mathfrak{S}_i$ frei vorkommenden Variablen in $\mathfrak{S}_i'$ frei oder gebunden sind.

Beispiele. 1. Auf Grund von ‚$(x)\,(Rxa \equiv Sbx)$' darf in ‚$(\exists x)\,(Px \vee Rxa)$' ‚$Rxa$' durch ‚$Sbx$' ersetzt werden, mit dem Ergebnis ‚$(\exists x)\,(Px \vee Sbx)$' (d. h. der letztgenannte Satz ist L-impliziert von den beiden erstgenannten, nach L3f). — 2. Nach Lehrsatz L8—6i (1) sind ‚$Px \supset Rxy$' und ‚$\sim Rxy \supset \sim Px$' L-äquivalent. Ist nun etwa der faktische Satz ‚$(x)\,(\exists y)\,[(Px \supset Rxy) \vee Qy]$' gegeben, so kann man ihn nach L3g in den L-äquivalenten Satz ‚$(x)\,(\exists y)\,[(\sim Rxy \supset \sim Px) \vee Qy]$' umformen.

15b. Definitionen. Ein neues Zeichen auf Grund alter Zeichen definieren, heißt, es so einführen, daß seine Bedeutung mit Hilfe der alten Zeichen angegeben wird. Eine Definition muß uns in den Stand setzen, das neue Zeichen in einem gegebenen Satz zu eliminieren, d. h. den Satz in einen L-äquivalenten Satz, der das Zeichen nicht mehr enthält, umzuformen. (Das muß zumindest für Sätze gewisser einfacher Formen möglich sein, nicht notwendig für alle Sätze überhaupt.) In manchen Fällen ist das neue Zeichen gleichbedeutend mit einem Ausdruck, der aus alten Zeichen gebildet ist, so z. B., wenn für den Satz ‚$Pa \vee (x)\,Qx$' die Abkürzung ‚A' eingeführt wird. Das ist jedoch nicht immer der Fall. Angenommen, wir wollen die in dem Satz ‚$Pa \vee Rab$' von dem Individuum a ausgesagte Eigenschaft mit ‚Q' bezeichnen. Hier können wir keinen aus alten Zeichen bestehenden Ausdruck finden, der mit ‚Q' gleichbedeutend wäre. Wir könnten nun etwa so formulieren: „Der Satz ‚Qa' soll als Abkürzung für ‚$Pa \vee Rab$' gelten, und Entsprechendes soll für andere Vollsätze von ‚Q' gelten. Der Lehrsatz L3g setzt uns nun aber in den Stand, diese Bestimmung in einfacherer Form niederzulegen. Wir tun dies durch Aufstellung der Satzformel ‚$Qx \equiv Px \vee Rxb$' als einer Definition. Die Definition bringt zum Ausdruck, daß wir dem Prädikat ‚Q' eine solche Bedeutung geben, daß die Definition und daher auch jede Einsetzungsinstanz wahr ist, nicht aus faktischen, sondern aus logischen

Gründen, d. h. auf Grund der Bedeutungen. Daher wollen wir, in Erweiterung des bisherigen Gebrauchs der L-Terme, die Definitionsformel und damit auch alle ihre Einsetzungsinstanzen als L-wahr ansehen. Die beiden Glieder der Äquivalenz nehmen wir dann als L-äquivalent und daher als L-ersetzbar, und gleichfalls entsprechende Einsetzungsinstanzen. So kann dann z. B. ‚*Qa*' stets in ‚*Pa* $\vee$ *Rab*' umgeformt werden und umgekehrt; nicht nur, wenn es als selbständiger Satz vorkommt, sondern auch als Teil in einem Satz; und ‚*Qx*' kann in beliebigem Zusammenhang, auch wenn das ‚*x*' dort gebunden ist, durch ‚*Px* $\vee$ *Rxb*' ersetzt werden und umgekehrt.

Die Definition eines mehrstelligen Prädikates ist analog. Z. B. hat die Definition für ein zweistelliges Prädikat ‚*R*' die Form ‚*Rxy* $\equiv$ ..*x*..*y*..', wobei die rechte Seite der Äquivalenz eine Satzformel ist, in der höchstens ‚*x*' und ‚*y*' als freie Variable vorkommen.

Jede Definition besteht aus einer Verknüpfung zweier Glieder. Das Glied, das das neue Zeichen enthält, heißt Definiendum (in den obigen Beispielen ‚*Qx*' und ‚*Rxy*'); wir wollen es immer als erstes Glied schreiben. Das andere Glied, das nur alte Zeichen enthält, heißt das Definiens. Im Definiendum müssen alle Variablen, die im Definiens frei vorkommen, ebenfalls vorkommen, und zwar jede einmal. (Genaueres s. **21e**.) Die Definition einer Satzkonstanten, etwa ‚*A*', hat einfach die Form ‚*A* $\equiv$ ...', wobei das Definiens ‚...' geschlossen sein muß. (Als Abkürzung für eine offene Satzformel kann man nicht eine Satzkonstante, sondern nur ein Prädikat mit entsprechenden Argumenten einführen, z. B. für ‚*Rax* $\vee$ *Px*' ‚*Qx*'.)

15c. Beispiele. I. Individuenbereich: die natürlichen Zahlen. Die Prädikate ‚*I*' (zweistellig) und ‚*Prod*' (dreistellig) seien entweder Grundzeichen oder zuvor definiert; ‚*I* (*a*, *b*)' möge bedeuten „*a* ist gleich *b*", und ‚*Prod* (*a*, *b*, *c*)': „*a* ist das Produkt von *b* und *c*". ‚*Tlb* (*a*, *b*)' soll bedeuten: „*a* ist teilbar durch *b*". ‚*Tlb*' und ‚*Prim*' können in folgender Weise definiert werden:

1. $Tlb\,(x, y) \equiv (\exists z)\ Prod\,(x, y, z)$.
2. $Prim\,(x) \equiv (y)\,(Tlb\,(x, y) \supset I\,(y, 1) \vee I\,(y, x))$.

II. Individuenbereich: die Menschen. Vorausgesetzte Grundzeichen: ‚*Elt*' („Elter") und ‚*Ml*' („Männlich"). Definitionen:

3. („Mensch") $Me\,(x) \equiv (\exists y)\,(Elt\,(x, y) \vee Elt\,(y, x))$.
4. („Weiblich") $Wl(x) \equiv Me\,(x) \,.\, \sim Ml\,(x)$.
5. („Vater") $Va\,(x, y) \equiv Elt\,(x, y) \,.\, Ml\,(x)$.
6. („Kind") $Ki\,(x, y) \equiv Elt\,(y, x)$.
7. („Sohn") $So\,(x, y) \equiv Ki\,(x, y) \,.\, Ml\,(x)$.
8. („Großelter") $GrElt\,(x, y) \equiv (\exists z)\,(Elt\,(x, z) \,.\, Elt\,(z, y))$.

Weitere Begriffe, z. B. „Bruder" u. a., werden später definiert (**17b**). Einige dieser Definitionen können in der Sprache C wesentlich einfacher formuliert werden (**30c**).

Übungen. Man definiere, im Anschluß an die soeben gegebenen Definitionen, die folgenden Prädikate. 1. ‚*Mu*' („Mutter"); 2. ‚*To*' („Tochter"); 3. ‚*GrVa*' („Großvater"); 4. ‚*GrMu*' („Großmutter"); 5. ‚*Enk*' („Enkelkind"); 6. ‚*EnkSo*' („Enkelsohn"); 7. ‚*EnkTo*' („Enkeltochter"). Für die Definitionen der folgenden Prädikate nehme man ‚*Eh*' („Ehemann") als dritten Grundbegriff hinzu. 8. ‚*Ehf*' („Ehefrau"); 9. ‚*SchVa*' („Schwiegervater"); 10. ‚*SchMu*' („Schwiegermutter"); 11. ‚*SchSo*' („Schwiegersohn"); 12. ‚*SchTo*' („Schwiegertochter").

16. Prädikate höherer Stufen

16a. Prädikate und Prädikatvariable verschiedener Stufen. Angenommen, in einer gewissen Theorie, die in unserer symbolischen Sprache formuliert ist, wird ein bestimmter Satz $\mathfrak{S}_1$ von komplizierter Form behauptet, der das Prädikat ‚P_1' ein- oder mehrmals enthält; $\mathfrak{S}_1$ sei angedeutet durch ‚$..P_1..P_1..$'. Angenommen ferner, daß für gewisse andere Prädikate ‚P_2' und ‚P_3' die entsprechenden Sätze ebenfalls behauptet werden, d. h. die Sätze, die aus $\mathfrak{S}_1$ dadurch hervorgehen, daß an Stelle von ‚P_1' ‚P_2' bzw. ‚P_3' geschrieben wird: ‚$..P_2..P_2..$' ($\mathfrak{S}_2$) und ‚$..P_3..P_3..$' ($\mathfrak{S}_3$). Für gewisse weitere Eigenschaften P_4 und P_5 will man dagegen das Gegenteil von dem behaupten, was in $\mathfrak{S}_1$ für P_1 ausgesagt wird. Es werden also die Negationen der entsprechenden Sätze mit den Prädikaten ‚P_4' und ‚P_5' aufgestellt: ‚$\sim(..P_4..P_4..)$' ($\mathfrak{S}_4$) und ‚$\sim(..P_5..P_5..)$' ($\mathfrak{S}_5$). An Stelle der Punkte stelle man sich hier überall die restlichen Symbole vor, die gemäß unserer Voraussetzung für alle die genannten Sätze dieselben sind. Um nun nicht immer die ganzen langen Sätze aufschreiben zu müssen, ist es zweckmäßig, Abkürzungen einzuführen, etwa ‚$M_1(P_1)$' für $\mathfrak{S}_1$. Hier ist ‚P_1' ein Argumentausdruck; ‚M_1' ist ein Zeichen neuer Art, ein Prädikat, das sich von den bisher verwendeten Prädikaten dadurch unterscheidet, daß sein Argumentausdruck nicht ein Individualzeichen, sondern auch ein Prädikt ist; wir nennen ‚M_1' ein Prädikat zweiter Stufe. Für die Sätze $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ und $\mathfrak{S}_5$ können wir nun die folgenden Abkürzungen verwenden: ‚$M_1(P_2)$', ‚$M_1(P_3)$', ‚$\sim M_1(P_4)$', ‚$\sim M_1(P_5)$'.

Wir nennen die Prädikate, deren Argumentausdrücke Individualzeichen sind — also diejenigen, die wir bisher allein betrachtet haben —, Prädikate erster Stufe. Ein Prädikat, dessen Argumentausdrücke Prädikate erster Stufe sind, wie z. B. ‚M_1' in dem genannten Beispiel, heißt ein Prädikat zweiter Stufe. Nehmen wir solche Prädikate zweiter Stufe als Argumentausdrücke, so kommen wir zu Prädikaten dritter Stufe usw. Die Individualzeichen nennen wir Zeichen nullter Stufe. Wir wollen auch mehrstellige Prädikate der verschiedenen Stufen zulassen, also Sätze von der Form ‚$M_2(P, Q)$', ‚$M_3(P, Q, R)$' usw. Die Argumentsausdrücke verschiedener Stellen hinter einem Prädikat müssen nicht notwendig von gleicher Stufe sein. Führen wir als Abkürzung für einen Satz ‚$..a..P..$' den Satz ‚$M_4(a, P)$' ein, so gehören die Argumentausdrücke erster Stelle von ‚M_4' zur nullten Stufe, die der zweiten Stelle zur ersten Stufe. Ist die höchste der Stufen der Argumentausdrücke eines Prädikates die Stufe n, so nennen wir das Prädikat selbst ein Prädikat von $(n+1)$-ter Stufe. ‚M_4' ist also von zweiter Stufe.

Wir haben früher neben den Individualkonstanten Individualvariable verwendet, um Allgemeinheit und Existenz in bezug auf die Objekte des betreffenden Bereiches zum Ausdruck bringen zu können. Wir wollen nun in analoger Weise neben den Prädikatkonstanten Prädikatvariable verwenden, und zwar auf beliebigen Stufen. Solche Prädikatvariable wollen wir sowohl als freie Variable zulassen, als auch in All- und Existenz-

operatoren. (Bisher haben wir nur Prädikatvariable erster Stufe verwendet, und nur als freie Variable, s. **10**.) Damit können wir dann Allgemeinheit und Existenz in bezug auf Attribute (Eigenschaften oder Relationen) zum Ausdruck bringen. Als Prädikatvariable der ersten Stufe verwenden wir ‚*F*', ‚*G*', ‚*H*', ‚*K*'. Angenommen, es sei ein Satz $\mathfrak{S}_1$ gegeben, der das Prädikat ‚*P*' enthält, etwa ‚..*P*..*P*..', und wir wollen zum Ausdruck bringen, daß das, was $\mathfrak{S}_1$ über die Eigenschaft *P* aussagt, für jede beliebige Eigenschaft (von Individuen des betreffenden Bereiches) zutrifft, so schreiben wir: ‚$(F)\,(..F..F..)$' („Für jedes *F*: ..."). Wollen wir anderseits zum Ausdruck bringen, daß das in $\mathfrak{S}_1$ für *P* Ausgesagte zwar nicht notwendig für *P*, aber doch für mindestens eine Eigenschaft von Individuen zutrifft, so schreiben wir: ‚$(\exists F)\,(..F..F..)$' („Für mindestens ein *F*: ..." oder „Es gibt ein *F* derart, daß ...").

In Analogie zu früher (**10b**) können wir hier sagen, daß die Intensionen von Prädikaten höherer Stufen Attribute (Eigenschaften oder Relationen) höherer Stufen sind, und ihre Extensionen Klassen höherer Stufen. Wie früher (**10** und **11**), brauchen wir als Werte für Prädikate höherer Stufen in einer Bewertung nur Extensionen zu berücksichtigen, also Klassen höherer Stufen. Die Definitionen der L-Begriffe sind hier wie früher (**5**); aber die Bewertungen werden jetzt ausgedehnt auf deskriptive Prädikate und Prädikatvariable höherer Stufen. Bei der Anwendung von L-Begriffen werden wir aber zur Einfachheit meist auf die technische Methode der Bewertungen verzichten. Um zu zeigen, daß eine gegebene Formel L-wahr ist, werden wir gewöhnlich nur intuitiv klar machen, daß sie „in allen möglichen Fällen" gilt.

16b. Stufenerhöhung. Betrachten wir irgend eine L-wahre Satzformel, die als Individualzeichen und Prädikate nur Variable, keine Konstanten enthält, z. B. ‚$(x)\,(Fx) \supset Fy$' ($\mathfrak{S}_1$). Eine entsprechende Satzformel $\mathfrak{S}_2$ mit Variablen erster und zweiter Stufe, etwa ‚$(F)\,(N(F)) \supset N(G)$' (wo ‚*N*' eine Prädikatvariable zweiter Stufe ist), ist offenbar ebenfalls L-wahr. Denn wenn alle Eigenschaften erster Stufe die Eigenschaft zweiter Stufe *N* haben, so auch *P*; also ist ‚$(F)\,N(F) \supset N(P)$' L-wahr. Dasselbe gilt auch für jede andere Eigenschaft erster Stufe an Stelle von *P*; daher ist auch $\mathfrak{S}_2$ L-wahr. Eine entsprechende Überlegung gilt für jede beliebige höhere Stufe. Auch bei allen andern, früher als L-wahr angegebenen Satzformeln, die keine deskriptiven Konstanten enthalten, läßt sich zeigen, daß die ihnen entsprechenden Satzformeln mit Variablen höherer Stufen ebenfalls L-wahr sind. Somit gilt der folgende Lehrsatz; der technische Beweis ist kompliziert und soll daher hier nicht gegeben werden.

L16—1. Stufenerhöhung. $\mathfrak{S}_i$ sei irgend eine der Satzformeln, die in den Lehrsätzen L14—1 und L14—2 als L-wahr angegeben sind. $\mathfrak{S}_j$ sei eine Satzformel, die aus $\mathfrak{S}_i$ dadurch entsteht, daß die Individualvariablen durch Prädikatvariable n-ter Stufe und die Prädikatvariablen (erster Stufe) durch Prädikatvariable $(n+1)$-ter Stufe ersetzt werden. Dann ist auch $\mathfrak{S}_j$ L-wahr.

Einsetzungen für Prädikatvariable höherer Stufen werden in genau analoger Weise ausgeführt wie für solche der ersten Stufe, und zwar sowohl einfache Einsetzungen wie auch Formeleinsetzungen. Die Lehrsätze L12—1 und 2 gelten hier analog. Ferner gelten für Operatoren mit Prädikatvariablen beliebiger Stufen Lehrsätze analog zu denen in **13** und **14**.

Bemerkung. Die Stufenerhöhung wird durch L1 nur für bestimmte L-wahre Satzformeln zugelassen. Sie ist auch zulässig für alle übrigen in unsern bisherigen Überlegungen betrachteten L-wahren Satzformeln, die als Satz-, Individual- und Prädikatzeichen nur Variable, keine Konstanten, enthalten. Sie ist jedoch nicht allgemein zulässig für beliebige L-wahre Satzformeln dieser Art, sondern nur für solche, die in jedem (nicht-leeren) Individuenbereich, unabhängig von der Anzahl der Individuen, L-wahr sind. Auf Satzformeln, deren Gültigkeit von der Anzahl der Individuen abhängt (z. B. die verschiedenen möglichen Formen für G **12**, **22 a**, **b** und **37 e** und andere mit einem solchen Grundsatz zusammenhängende Sätze), darf die Stufenerhöhung dagegen nicht allgemein angewendet werden.

16 c. Beispiele. 1. Bereich der natürlichen Zahlen. Es gilt:

$$(x)\,(y)\,(z)\,\big(Kl\,(x, y)\,.\,Kl\,(y, z) \supset Kl\,(x, z)\big). \qquad (1)$$

$$(x)\,(y)\,(z)\,\big(Gr\,(x, y)\,.\,Gr\,(y, z) \supset Gr\,(x, z)\big). \qquad (2)$$

Da Sätze dieser Form häufig auftreten, lohnt es sich, eine Abkürzung für sie einzuführen. Man nennt Relationen, die die hier ausgesagte Bedingung erfüllen, transitive Relationen. (1) besagt also, daß *Kl* transitiv ist. Die Transitivität ist eine Eigenschaft von Relationen, nicht von Individuen; sie ist daher in unserer symbolischen Sprache durch ein Prädikat zweiter Stufe auszudrücken, etwa durch ‚Trans'. Dieses Prädikat wird eingeführt durch die folgende Definition:

$$Trans\,(H) \equiv (x)\,(y)\,(z)\,\big(Hxy\,.\,Hyz \supset Hxz\big). \qquad (3)$$

Setzen wir hier für die freie Variable ‚*H*' z. B. die Konstante ‚*Kl*' ein, so erhalten wir:

$$Trans\,(Kl) \equiv (x)\,(y)\,(z)\,\big(Kl\,(x, y)\,.\,Kl\,(y,z) \supset Kl\,(x,z)\big). \qquad (4)$$

Auf Grund hiervon können wir nun (mit Hilfe des Lehrsatzes der Ersetzbarkeit, L15—3) den ursprünglichen Satz (1), auch wenn er irgendwo als Teil in einem andern Satz vorkommt, stets durch die Abkürzung ‚*Trans* (*Kl*)' ersetzen, und umgekehrt diese Abkürzung, wo immer sie vorkommt, durch den Satz (1). Ebenso wird (2) durch ‚*Trans* (*Gr*)' abgekürzt usf.

Übungen. Man definiere das Prädikat zweiter Stufe ‚*Sym*' in Analogie zu ‚*Trans*' derart, daß ‚*Sym* (*R*)' bedeutet: „*R* ist symmetrisch", d. h. „Wenn *R* zwischen irgendwelchen (Individuen) besteht, so auch (stets) zwischen denselben (Individuen) in umgekehrter Reihenfolge". (Die Definition für ‚*Sym*' wird später in vereinfachter Form gegeben: D 31—1 a.) In der Definition wird nicht die Konstante ‚*R*' verwendet, sondern eine entsprechende Variable, etwa ‚*H*'.

17. Identität; Kardinalzahlen

17 a. Identität. ‚$a = b$' soll bedeuten, daß a und b identisch sind, d. h. daß a dasselbe Individuum ist wie b. ‚$=$' heißt Identitätszeichen; wir wollen hier in der Sprache A dieses Zeichen nur zwischen Individualausdrücken verwenden. (Über die weitere Verwendung vgl. **29**.) Alle Einsetzungsinstanzen von ‚$x = x$', z. B. ‚$a = a$', treffen somit zu; und sie sind in der Tat L-wahr (nach R11—1i). Daher ist auch ‚$x = x$' L-wahr,

und ebenso ‚$(x)(x = x)$'. Das Zeichen ‚$\neq$' verwenden wir für „nicht-identisch".

Wenn eine Satzformel mit ‚$=$' oder ‚$\neq$' als Teil in einem größeren Zusammenhang vorkommt, so dürfen die sie einschließenden Klammern weggelassen werden (s. **3c**, Regel (1)). Ist a dasselbe Individuum wie b, so muß alles, was über a gesagt werden kann, auch für b zutreffen; d. h. ‚$a = b$' ($\mathfrak{S}_1$) L-impliziert ‚$(F)(Fa \supset Fb)$' ($\mathfrak{S}_2$). $\mathfrak{S}_2$ besagt, daß, wenn a irgend eine Eigenschaft hat, auch b sie hat. Aber auch die Umkehrung gilt: $\mathfrak{S}_2$ L-impliziert $\mathfrak{S}_1$. Denn da a die Eigenschaft hat, mit a identisch zu sein, so muß nach $\mathfrak{S}_2$ auch b diese Eigenschaft haben. In technischen Termen ist die Ableitung von $\mathfrak{S}_1$ aus $\mathfrak{S}_2$ wie folgt. In Analogie zu L13—1d L-impliziert $\mathfrak{S}_2$ jeden Satz, der aus ‚$Fa \supset Fb$' durch eine beliebige Einsetzung für die freie Variable ‚F' hervorgeht. Wir nehmen die Formeleinsetzung von ‚$a = x$' für ‚Fx'. Nach den Einsetzungsregeln (**12c**) muß ‚Fa' durch ‚$a = a$' ersetzt werden und ‚Fb' durch ‚$a = b$'. So erhalten wir ‚$a = a \supset a = b$'. Da ‚$a = a$' L-wahr ist, so folgt ‚$a = b$'. Da somit $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ L-äquivalent sind, können wir das Identitätszeichen in folgender Weise definieren:

D17—1. **a.** $(x = y) \equiv (x)(Fx \supset Fy)$.
b. $(x \neq y) \equiv \sim(x = y)$.

L17—1. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr:
a. $x = x$.
b. $x = y \supset y = x$.
c. $x = y \,.\, y = z \supset x = z$.

(In Worten: Die Identität ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.)

L17—2. ‚..a..' sei ein Satz, der ‚a' enthält; ‚..b..' sei ein Satz, der dadurch aus ‚..a..' entsteht, daß ‚a' ein- oder mehrmals (nicht notwendig an allen Stellen, an denen es vorkommt) durch ‚b' ersetzt wird. Dann ist ‚..b..' L-impliziert von ‚$a = b$' und ‚..a..'. — Mit andern Worten: Ist ein Identitätssatz gegeben, so kann das eine Glied (nach L1b ist es gleichgültig, ob das erste oder das zweite), wenn es in irgend einem Satz vorkommt, stets durch das andere ersetzt werden.

17b. Beispiele. In dem früher angegebenen System der Verwandtschaftsbegriffe (**15c**) können manche Begriffe nur definiert werden, wenn wir das Identitätszeichen (oder Prädikatvariable in Operatoren) zu Hilfe nehmen. Beispiel: Die Relation Bruder; ‚$Bru\,(a, b)$' ist nicht gleichbedeutend mit „a ist Sohn des Vaters von b und a ist Sohn der Mutter von b". Denn a und a haben auch Vater und Mutter gemein; a ist aber nicht Bruder von sich selbst. Die Definition von ‚Bru' muß also so formuliert werden, daß der Fall der Identität ausgeschlossen wird: $Bru\,(x, y) \equiv (\exists u)(So\,(x, u) \,.\, Va\,(u, y)) \,.\, (\exists v)(So\,(x, v) \,.\, Mu\,(v, y)) \,.\, x \neq y$. (Einfachere Definition für ‚Bru' in Sprache C: **30c**.)

Übungen. Man definiere in demselben System 1. „Schwester"; 2. „Vetter" 3. „Base". — 4. Man übersetze den Satz „2 ist die einzige gerade Primzahl" in verschiedenen Formen, z. B. (a) „2 ist eine gerade Primzahl; und jede andere (d. h. nicht mit 2 identische) (Zahl) ist nicht . ."; (b) „2 ist . ., und es gibt keine andere . ."; (c) „Wenn x identisch mit 2, so ist x eine gerade Primzahl, und umgekehrt (d. h.: wenn x eine gerade Primzahl, so . .)"; (d) die

beiden Implikationssätze von (c) können in einen Äquivalenzsatz zusammengefaßt werden (gemäß L8—6f (1)). — 5. Man übersetze: „Jede (natürliche Zahl) hat höchstens einen Vorgänger“ (‚*Vorg*‘); d. h. „Ist x Vorgänger von z und y Vorgänger von z, so sind x und y dieselbe (Zahl)“. — 6. „Jede (natürliche Zahl) ist Vorgänger von einer und nur einer (Zahl)“; d. h. „.. von mindestens einer .., und .. von höchstens einer ..“ (der zweite Teil ist analog zu (5)). — 7. „Für (zwei) verschiedene (Zahlen) x und y gilt, daß entweder x kleiner als y ist oder umgekehrt“; in vielen derartigen Fällen kann „zwei“ durch „nicht-identisch“ ausgedrückt werden.

17c. Kardinalzahlen. Wir wollen zunächst einige Redewendungen in die deutsche Wortsprache (nicht in die symbolische Sprache) einführen, um die späteren Worterläuterungen gewisser symbolischer Ausdrücke zu vereinfachen. Anstatt „a hat die Eigenschaft P“, wollen wir zuweilen auch sagen „a ist ein P-Individuum“ oder auch kurz „a ist ein P“; ferner auch „a ist ein Element der Klasse derjenigen Individuen, die die Eigenschaft P haben“ oder kurz „a ist ein Element der Klasse P“. Anstatt „Es gibt genau 5 Individuen mit der Eigenschaft P“ oder „Es gibt genau 5 P-Individuen“, wollen wir auch sagen: „Die Eigenschaft P (oder: die Klasse P) besitzt die Kardinalzahl 5“ oder kurz: „P hat die Kardinalzahl 5“. Wir wollen im folgenden die Kardinalzahlen 0, 1, 2 usw. explizieren, d. h. exakte Definitionen aufstellen, die die übliche Bedeutung dieser Zahlzeichen erfassen. Die Kardinalzahl 5 zu besitzen, ist nach dem Gesagten eine Eigenschaft gewisser Eigenschaften (oder Klassen), also zu symbolisieren durch ein Prädikat zweiter Stufe. Wir wollen einfach die Ziffer ‚5‘ als dieses Prädikat nehmen; wir schreiben also für „P hat die Kardinalzahl 5“: ‚$5\,(P)$‘; ‚5‘ ist hier ein Prädikat zweiter Stufe, ‚P‘ sein Argumentausdruck. Analog schreiben wir ‚$0\,(P)$‘ für „P hat die Kardinalzahl 0 (d. h. es gibt kein P-Individuum)“; ‚$1\,(P)$‘ für „P hat die Kardinalzahl 1 (d. h. es gibt genau ein P-Individuum)“ usw. Bevor wir (in D3) diese Prädikate ‚0‘, ‚1‘ usw. definieren, wollen wir (in D2) die Prädikate ‚1_m‘, ‚2_m‘ usw. definieren; diese dienen hauptsächlich zur einfacheren Formulierung der Definitionen D3 und werden sonst selten verwendet. ‚$1_m\,(P)$‘ soll heißen: „Es gibt mindestens ein P-Individuum“; ‚$2_m\,(P)$‘: „Es gibt mindestens zwei P-Individuen“ usw. Der letztgenannte Satz ist nicht gleichbedeutend mit: „Es gibt x, y derart, daß: x ist P und y ist P“; denn dies würde auch zutreffen, wenn es nur ein P-Individuum a gäbe, da ‚a‘ sowohl für ‚x‘ als für ‚y‘ genommen werden könnte. Wir müssen deshalb hinzufügen: „und x und y sind nicht identisch“. Dies zur Begründung des letzten Gliedes in D2b. — Zur Begründung der Definitionen D3: „Es gibt n P-Individuen“ ist gleichbedeutend mit: „Es gibt mindestens n P-Individuen, und es gibt nicht mindestens $n + 1$ P-Individuen“.

D17—2. a. $1_m\,(F) \equiv (\exists\, x)\, Fx.$

b. $2_m\,(F) \equiv (\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(Fx\,.\,Fy\,.\,x \neq y).$

c. $3_m\,(F) \equiv (\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(\exists\, z)\,(Fx\,.\,Fy\,.\,Fz\,.\,x \neq y\,.\,x \neq z\,.\,y \neq z).$

Analog sind die weiteren Definitionen für ‚4_m‘ usw. aufzustellen.

D17—3. a. $0\,(F) \equiv \sim 1_m\,(F)$.
b. $1\,(F) \equiv 1_m\,(F) \,.\, \sim 2_m\,(F)$.
c. $2\,(F) \equiv 2_m\,(F) \,.\, \sim 3_m\,(F)$.

Analog sind die weiteren Definitionen für ‚3' usw. aufzustellen.

Übungen. Man definiere ‚*P*' derart, daß ‚*Pb*' bedeutet „*b* ist ein Kind des Mannes *a*" (mit Hilfe von ‚*Va*'). Man übersetze die folgenden Sätze: 8. (a) „*a* hat mindestens 3 Kinder"; (b) „.. höchstens 3 .." (d. h. „.. nicht mindestens 4 .."); (c) „.. genau 3 ..".

18. Funktoren

18a. Funktoren; Bereiche einer Relation. Für den Individuenbereich der natürlichen Zahlen — wo also die Zahlzeichen wie ‚1', ‚2' usw. Individualkonstanten sind, und nicht Prädikate zweiter Stufe wie in **17** — sei das Symbol ‚*prod*' so eingeführt, daß ‚*prod* (*a*, *b*)' bedeutet ‚das Produkt der Zahlen *a* und *b*'. ‚*a*' und ‚*b*' heißen die Argumentausdrücke von ‚*prod*' in ‚*prod* (*a*, *b*)'. Früher haben wir ‚*Pa*' einen Vollsatz von ‚*P*' genannt; in Analogie dazu wollen wir hier ‚*prod* (*a*, *b*)' einen Vollausdruck von ‚*prod*' nennen. ‚*prod*' unterscheidet sich von den Prädikaten dadurch, daß ein Vollausdruck von ‚*prod*' kein Satz ist, sondern eine Bezeichnung für eine Zahl, also ein Ausdruck nullter Stufe (in diesem Beispiel). Allgemein wollen wir ein Zeichen dieser Art, dessen Vollausdrücke (mit *n* Argumenten) keine Sätze sind, einen *n*-stelligen Funktor nennen. Die Vollausdrücke eines Funktors mögen, wie in dem angegebenen Beispiel, Ausdrücke der Stufe null sein, also Individualausdrücke, Bezeichnungen für ein Individuum (des betreffenden Bereiches). Es gibt aber auch Funktoren anderer Art, deren Vollausdrücke zur Bezeichnung eines Attributs dienen und daher Prädikatausdrücke (erster oder höherer Stufe) heißen. Die folgenden Begriffsbildungen führen zu Funktoren dieser Art.

Wir wollen eine Person, die Bruder von jemandem ist, ein Glied erster Stelle oder kurz ein Erstglied der Relation Bruder nennen; eine Person, zu der jemand in der Bruder-Relation steht, wollen wir ein Glied zweiter Stelle oder kurz ein Zweitglied nennen. Für irgend eine zweistellige Relation *R* nennen wir die Klasse der Erstglieder den ersten Bereich oder Vorbereich von *R*. In der symbolischen Sprache wird diese Klasse (oder die entsprechende Eigenschaft, ein Erstglied von *R* zu sein) durch ‚mem_1 (*R*)' ausgedrückt. „*a* ist ein Erstglied von *R*" wird wiedergegeben durch ‚mem_1 (*R*) (*a*)'. In diesem Satz ist ‚mem_1 (*R*)' ein Prädikatausdruck, und zwar ein einstelliger Prädikatausdruck erster Stufe, da er durch den Argumentausdruck ‚*a*', also eine Individualkonstante, zu einem Satz ergänzt wird. Das Zeichen ‚*mem*' ist ein Funktor, da sein Vollausdruck ‚*mem* (*R*)' nicht ein Satz ist (sondern ein Prädikatausdruck). In analoger Weise wird die Klasse der Zweitglieder von *R* zweiter Bereich oder Nachbereich von *R* genannt und durch ‚mem_2 (*R*)' symbolisiert. Jedes Individuum, das ein Erstglied oder ein Zweitglied von *R* (oder beides) ist, heißt ein Glied von *R*. Die Klasse der Glieder von *R* heißt das Feld von *R*, symbolisch bezeichnet mit ‚*mem* (*R*)'. Ein Individuum, das ein

Erstglied, aber nicht ein Zweitglied von R ist, heißt ein Anfangsglied von R. Ein Individuum, das ein Zweitglied, aber nicht ein Erstglied von R ist, heißt ein Endglied von R. (Beispiel. Die Relation Vorgänger im Bereich der natürlichen Zahlen hat 0 als einziges Anfangsglied, hat aber kein Endglied.)

In der Definition von ‚mem_1' verwenden wir die genannte Satzform ‚$mem_1(R)(a)$', müssen aber natürlich an Stelle der Konstanten ‚R' und ‚a' entsprechende Variable verwenden, etwa ‚H' und ‚x'.

D18—1. $mem_1(H)(x) \equiv (\exists\, y)\, Hxy.$
D18—2. $mem_2(H)(x) \equiv (\exists\, y)\, Hyx.$
D18—3. $mem(H)(x) \equiv mem_1(H)(x) \vee mem_2(H)(x).$

Bei einer n-stelligen Relation T ($n > 2$) unterscheiden wir den ersten, den zweiten, ..., den n-ten Bereich von T; ihre Vereinigung ist das Feld von T.

Übungen. Man übersetze die folgenden Sätze mit Hilfe der genannten Funktoren (in 3—5 und 8 verwende man das Prädikat ‚*Quadr*'). — 1. „a ist ein Vater", d. h. „.. ein Erstglied von ..". — 2. „Mütter sind weiblich." — 3. „9 ist eine Quadratzahl." — 4. „Nicht jede (Zahl) ist eine Quadratzahl." — 5. „Jede (Zahl) ist eine Quadratwurzel" („Zweitglied"). — 6. „Jede (Zahl) ist ein Glied der Vorgängerrelation" (‚*Vorg*'). — 7. „Ist eine (Zahl) Vorgänger einer andern, so ist das Produkt der beiden gerade." — 8. „Das Produkt von 2 und 18 ist eine Quadratzahl."

18b. Bedingungen für die Einführung von Funktoren. Wir wollen in unserer symbolischen Sprache zulassen, daß nicht nur Individualzeichen und Prädikate, sondern auch Funktoren als Argumentausdrücke von andern Funktoren oder von Prädikaten auftreten; ferner wollen wir auch Funktorvariable zulassen (z. B. ‚f', ‚g' usw.), und zwar sowohl als freie Variable, als auch gebunden durch All- oder Existenzoperatoren. Funktorvariable kommen in elementaren Bereichen nicht häufig vor, aber z. B. in der Theorie der reellen Zahlen (eine reelle Zahl kann durch einen Funktor im Bereich der natürlichen Zahlen dargestellt werden (vgl. **40d**), und Funktorvariable höherer Stufe in der mathematischen Funktionentheorie und in der Formulierung gewisser sehr allgemeiner physikalischer Prinzipien (vgl. z. B. **41**, **51**).

An Stelle eines n-stelligen Funktors kann stets auch ein $(n + 1)$-stelliges Prädikat verwendet werden, aber nicht umgekehrt. So haben wir z. B. die Wahl, in die arithmetische Sprache entweder den zweistelligen Funktor ‚*prod*' oder das dreistellige Prädikat ‚*Prod*' einzuführen; der Satz „a ist das Produkt von b und c" wird dann entweder durch ‚$a = prod(b, c)$' oder durch ‚$Prod(a, b, c)$' wiedergegeben. Ebenso haben wir die Wahl zwischen der Verwendung des einstelligen Funktors ‚*quadr*' und der des zweistelligen Prädikates ‚*Quadr*'; „a ist das Quadrat von b" (d. h. in üblicher Schreibweise: „$a = b^2$") wird entweder durch ‚$a = quadr(b)$' oder durch ‚$Quadr(a, b)$' ausgedrückt. Die Verwendung eines n-stelligen Funktors an Stelle eines $(n + 1)$-stelligen Prädikates ist nur dann möglich, wenn dieses Prädikat, etwa ‚T', die folgende Bedin-

gung erfüllt: Zu einer gegebenen Reihe von n Individuen ‚$(a_2, a_3, \ldots, a_{n+1})$' gibt es stets ein und nur ein Individuum, etwa a_1, derart, daß ‚$T(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$' erfüllt ist. Spalten wir die Bedingung „ein und nur ein" in ihre beiden Teile auf, so erhalten wir die folgenden beiden Bedingungen: (1) „mindestens einer", d. h. es muß gelten: ‚$(x_2)(x_3)\ldots(x_n)(x_{n+1})(\exists x_1)\, T(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$'; (2) „nicht mehr als einer", d. h. es muß gelten: ‚$(x_1)(y_1)(x_2)(x_3)\ldots(x_n)(x_{n+1})\ [T(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \,.\, T(y_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \supset x_1 = y_1]$'. Die erste Bedingung ist die der Existenz des ersten Gliedes, die zweite ist die der Eindeutigkeit von T in bezug auf die erste Stelle (diese zweite Eigenschaft werden wir in **19** mit ‚Un_1' bezeichnen). Das Prädikat ‚*Vorg*' erfüllt zwar die zweite Bedingung, nicht aber die erste, da 0 (im Bereich der natürlichen Zahlen) keinen Vorgänger hat. Würden wir nun trotzdem einen Funktor, etwa ‚*vorg*', einführen, so würde das zu dem sinnlosen Ausdruck ‚*vorg* (0)' führen. Die umgekehrte Relation, nämlich die Nachfolgerrelation, sei mit ‚*Nf*' bezeichnet. Sie erfüllt beide Bedingungen, da jede Zahl einen und nur einen Nachfolger hat. Daher dürfen wir hier einen entsprechenden Funktor, etwa ‚*nf*', einführen; ‚$nf(a)$' heißt: „der Nachfolger von a" (d. h. „$a + 1$"). Anderseits sei etwa R eine Relation, die die erste, aber nicht die zweite Bedingung erfüllt, indem etwa die Sätze ‚Rac', ‚Rbc' und ‚$a \neq b$' wahr sind. Würden wir nun trotzdem einen entsprechenden Funktor, etwa ‚k', einführen, so würde der Ausdruck ‚$k(c)$' zweideutig sein, indem er sowohl a als b bezeichnet. Dies würde zu einem Widerspruch führen. Denn an Stelle von ‚Rac' und ‚Rbc' würden wir jetzt ‚$a = k(c)$' und ‚$b = k(c)$' haben; hieraus folgt nach L17—1b und c ‚$a = b$'; und dies ist im Widerspruch mit unserer Voraussetzung ‚$a \neq b$'.

Durch diese Überlegungen wird ersichtlich, daß die Einführung eines bestimmten Funktors in ein Sprachsystem ein schwerwiegender Schritt ist, der nur vorgenommen werden darf, wenn die Berechtigung erwiesen ist, d. h. wenn die angegebenen beiden Bedingungen erfüllt sind. Sind sie erfüllt, so wird gewöhnlich die Einführung des Funktors erhebliche Vorzüge vor der des entsprechenden Prädikates haben, besonders, da der Vollausdruck des Funktors wieder als Argumentausdruck auftreten kann.

Beispiel. Der Satz ‚$(x)(y)(z)\ [Nf(y, x) \,.\, Prod(z, x, y) \supset Ger(z)]$' kann unter Verwendung von Funktoren kürzer so formuliert werden: ‚$(x)\ [Ger(prod(x, nf(x)))]$'.

19. Isomorphie

Die in diesem Paragraphen definierten Begriffe sind für viele einfachere Anwendungen der symbolischen Logik entbehrlich, für manche anderen jedoch von besonderer Wichtigkeit. [In den Anwendungsbeispielen in Teil II, soweit sie in Sprache A formuliert sind, kommen die hier definierten Begriffe nur in **43a**, **46a**, **51a** und **53a** vor.]

Wir nennen eine zweistellige Relation R voreindeutig (oder einmehrdeutig) — in der symbolischen Sprache: ‚$Un_1(R)$' —, wenn es zu jedem Zweitglied von R nur ein Erstglied gibt, das zu ihm in der Relation R steht. Wir nennen R nacheindeutig (oder mehreindeutig) — ‚$Un_2(R)$'

—, wenn es zu jedem Erstglied nur **ein** Zweitglied gibt, zu dem es in der Relation R steht. (Das Wort „mehr" in „einmehrdeutig" und „mehreindeutig" hat hier den Sinn von „ein oder mehrere", nicht von „mehr als ein"). R heißt **eineindeutig** — ‚$Un_{1,2}(R)$' —, wenn R voreindeutig und nacheindeutig ist.

D19—1. $Un_1(H) \equiv (u)(v)(x)\big(Hux \,.\, Hvx \supset u = v\big)$.

D19—2. $Un_2(H) \equiv (u)(x)(y)\big(Hux \,.\, Huy \supset x = y\big)$.

D19—3. $Un_{1,2}(H) \equiv Un_1(H) \,.\, Un_2(H)$.

(Für drei- und mehrstellige Relationen kann man analoge Begriffe definieren; ‚$Un_k(T)$' bedeutet: „die (etwa n-stellige) Relation T ist eindeutig in bezug auf die k-te Stelle", d. h. es gibt nicht zwei n-tupel von Individuen, die die Relation T erfüllen und sich nur im k-ten Individuum unterscheiden.)

Beispiele. Die Relation *Va* ist voreindeutig: ‚$Un_1(Va)$'; denn jeder hat höchstens einen Vater. *Va* ist aber nicht nacheindeutig, also nicht eineindeutig. *Quadr* ist voreindeutig und auch nacheindeutig, weil es (im Bereich der natürlichen Zahlen) zu einer Zahl höchstens eine Quadratwurzel gibt; also eineindeutig: ‚$Un_{1,2}(Quadr)$'. Dagegen ist die Relation Quadrat im Bereich der reellen Zahlen zwar voreindeutig, aber nicht nacheindeutig, weil eine positive Zahl Quadrat zweier verschiedener Zahlen ist; also nicht eineindeutig. *Vorg* ist eineindeutig, weil keine Zahl mehr als einen Vorgänger hat und keine Zahl Vorgänger von mehr als einer Zahl ist. Ebenso ist die umgekehrte Relation, die Nachfolgerrelation, eineindeutig. *Eh* ist (im Bereich einer monogamen Menschengruppe zu einem bestimmten Zeitpunkt) eineindeutig.

T_1 und T_2 seien dreistellige Relationen. Die zweistellige Relation R sei so beschaffen, daß sie T_1 auf T_2 abbildet, d. h. daß die folgenden vier Bedingungen erfüllt sind. (1) R ist eineindeutig. (2) Die Glieder von T_1 sind Erstglieder von R. (3) Die Glieder von T_2 sind Zweitglieder von R. (4) Bilden irgendwelche Glieder, etwa a_1, b_1, c_1, ein Tripel der Relation T_1 (d. h. ist ‚$T_1a_1b_1c_1$' wahr), so bilden die durch R ihnen zugeordneten Glieder, etwa a_2, b_2, c_2, ein Tripel von T_2 und umgekehrt. Sind diese vier Bedingungen erfüllt, so nennen wir R einen **Korrelator** zwischen T_1 und T_2. Die Definition dieses Begriffes hängt von der Stellenzahl von T_1 und T_2 ab (in unserem Beispiel: 3). Wir stellen im folgenden ein Definitionsschema auf, aus dem man die Definitionen für ‚$Corr_1$' (d. h. Korrelator für einstellige Attribute, oder mit anderen Worten, für Eigenschaften oder für Klassen), ‚$Corr_2$' (d. h. Korrelator für zweistellige Relationen) usw. bilden kann, indem man für ‚n' nacheinander ‚1', ‚2' usw. einsetzt. Der Korrelator selbst ist dabei stets eine zweistellige Relation.

D19—4. $Corr_n(K, H_1, H_2) \equiv Un_{1,2}(K) \,.\, (x)\big(mem(H_1)(x) \supset mem_1(K)(x)\big)$
$.\, (x)\big(mem(H_2)(x) \supset mem_2(K)(x)\big) \,.\, (x_1)(y_1)(x_2)(y_2)\ldots(x_n)(y_n)$
$\big[Kx_1y_1 \,.\, Kx_2y_2 \,.\, \ldots \,.\, Kx_ny_n \supset \big(H_1x_1x_2 \ldots x_n \equiv H_2y_1y_2 \ldots y_n\big)\big]$.

Hieraus ergibt sich z. B. die Definition für ‚$Corr_1$' (Klassenkorrelator) in folgender Weise (ein einstelliges Prädikat ‚P' ist gleichbedeutend mit ‚$mem(P)$'):

D19—4₁. $Corr_1 (K, F_1, F_2) \equiv Un_{1,2} (K) \,.\, (x) (F_1 x \supset mem_1 (K) (x)) \,.\, (x) (F_2 x \supset mem_2 (K) (x)) \,.\, (x) (y) [Kxy \supset (F_1 x \equiv F_2 y)]$.

Gibt es zwischen zwei n-stelligen Attributen T_1 und T_2 ($n = 1, 2, ..$) einen Korrelator, so sagen wir, T_1 und T_2 seien (n-stellig) isomorph miteinander, oder: sie haben dieselbe (n-stellige) Struktur. Die Definition der Isomorphie hängt wiederum von der Stellenzahl n ab; wir geben hier das Definitionsschema, in dem für ‚n' ‚1', ‚2' usw. gesetzt werden kann.

D19—5. $Is_n (H_1, H_2) \equiv (\exists K)\, Corr_n (K, H_1, H_2)$.

Die Bezeichnungen ‚isomorph' und ‚Struktur' hat man bisher gewöhnlich nur auf zwei- oder mehrstellige Attribute, also Relationen angewendet. Für einstellige Attribute, d. h. Eigenschaften oder Klassen, bedeutet Isomorphie dasselbe wie eineindeutige Zuordenbarkeit der Elemente der beiden Klassen, also Gleichzahligkeit; die Struktur einer Klasse ist somit dasselbe wie ihre Kardinalzahl (vgl. **34c**).

Beispiele. 1. In einer aus Ehepaaren bestehenden Gruppe sei P die Klasse der dazugehörenden Männer, Q die der Frauen. Dann wird durch die Eherelation (‚*Eh*') eine eineindeutige Zuordnung zwischen P und Q hergestellt. Also gilt: ‚$Corr_1 (Eh, P, Q)$'. Hieraus folgt, daß P und Q gleichzahlig sind: ‚$Is_1 (P, Q)$'.

2. Während ‚*Vorg*' die Vorgängerrelation im Gesamtbereich der natürlichen Zahlen (0, 1, 2 usw.) bezeichnet, möge ‚*Vorg*′' die Vorgängerrelation im Bereich der natürlichen Zahlen mit Ausschluß von 0 bezeichnen (1, 2, 3 usw.). Die beiden Relationen sind isomorph, wie man leicht sieht, wenn man in folgender Weise zuordnet: 0 (als Glied von ‚*Vorg*') zu 1 (als Glied von ‚*Vorg*′'), 1 zu 2, 2 zu 3, usw. Der Korrelator ist hier ‚*Vorg*', fällt also mit der einen der beiden zu vergleichenden Relationen zusammen. Es gilt hiernach: ‚$Corr_2 (Vorg, Vorg, Vorg')$', also $Is_2 (Vorg, Vorg')$'.

[Bemerkung. Das Symbol ‚Ism_n' in Carnap-Bachmann [Extremalaxiome] entspricht nicht unserem ‚Is_n' hier, sondern bezeichnet den weit komplizierteren Begriff der n-stufigen Isomorphie; vielleicht könnte dafür ‚${}^n Ism$' geschrieben werden, um den unteren Index zur Bezeichnung der Stellenzahl frei zu lassen.]

Hiermit ist die Darstellung der einfachen symbolischen Sprache A beendet. Die in Teil II aufgestellten Axiomensysteme und sonstigen Anwendungsbeispiele können jetzt gelesen werden, soweit sie in Sprache A formuliert sind (s. die Erläuterungen in **42e**).

B. Das Sprachsystem B

Im Kapitel A haben wir eine einfache symbolische Sprache A entwickelt. Im Kapitel C werden wir eine erweiterte Sprache C konstruieren, die alle Zeichen von A enthält (ausgenommen die Satzvariablen), aber darüber hinaus noch viele weitere Ausdrucksmittel.

In Kapitel B wollen wir einige methodologische Fragen besprechen Wir wollen an Beispielen die Methoden zeigen, nach denen syntaktische und semantische Sprachsysteme aufgebaut werden können. Zunächst

werden wir allgemein den Charakter solcher Systeme kurz erklären (**20**). Dann werden wir als Beispiel das syntaktische System B konstruieren (**21**—**24**) und dann das semantische System B (**25**). Zum Schluß werden die Beziehungen zwischen den beiden Systemen erklärt (**26**).

Die Sprache B ist so gewählt, daß alle Sätze von C und daher auch alle Sätze von A in sie übersetzt werden können. Um die Regeln für B aber nicht zu sehr zu komplizieren, haben wir in B manche Ausdrucksmittel von A und besonders von C weggelassen, jedoch nur solche, die nicht wesentlich sind, sondern bloß zur Abkürzung dienen.

Dieses Kapitel B ist abstrakter als die übrigen und für den Anfänger nicht so leicht verständlich. Es ist nicht unbedingt erforderlich für das Verständnis des Späteren: des Aufbaues der erweiterten Sprache C (Kapitel C) und der Anwendungen der symbolischen Logik (Teil II). Das gegenwärtige Kapitel mag daher beim ersten Lesen überschlagen werden.

20. Semantische und syntaktische Systeme

Bei Untersuchungen über Sprachen, entweder historisch vorliegende natürliche Sprachen oder künstliche Sprachsysteme, nennen wir die Sprache, die das Objekt der Untersuchung bildet, die Objektsprache. In diesem Buch sind unsere Objektsprachen die drei Sprachen A, B und C, die aus Buchstaben und künstlichen Symbolen bestehen. Diejenige Sprache, in der man über die Objektsprache spricht, wird die Metasprache genannt. In diesem Buch wird als Metasprache die deutsche Sprache verwendet, ergänzt durch gewisse technische Zeichen, darunter Frakturbuchstaben. In der Metasprache werden die Regeln für die betreffende Objektsprache formuliert, besonders semantische und syntaktische Regeln, und Lehrsätze aufgestellt, die sich auf Grund der Regeln ergeben.

In jeder Situation, in der eine Sprache angewendet wird, können in folgender Weise drei Hauptfaktoren unterschieden werden: (1) der Sprecher, ein Organismus in einem bestimmten Zustand innerhalb einer bestimmten Umgebung; (2) die verwendeten sprachlichen Ausdrücke, das sind von dem Sprecher hervorgebrachte Laute oder Schreibfiguren (z. B. ein Satz, bestehend aus bestimmten Wörtern der französischen Sprache); (3) die Gegenstände, Eigenschaften, Sachverhalte oder dergleichen, die der Sprecher mit den geäußerten Ausdrücken zu bezeichnen beabsichtigt; wir wollen sie die Designate der Ausdrücke nennen (so ist z. B. die Farbe Rot das Designat des französischen Wortes ‚rouge'). Die gesamte Theorie über eine Objektsprache wird die Semiotik der betreffenden Sprache genannt; die Semiotik wird in der Metasprache formuliert. Innerhalb der Semiotik werden drei Teilgebiete unterschieden, je nach den Faktoren, die dabei in Betracht gezogen werden. Eine Untersuchung der Sprache, die sich ausdrücklich auch auf den Sprecher bezieht — gleichgültig, welche der andern Faktoren sie mit in Betracht zieht —, gehört zum Gebiet der Pragmatik. Falls von dem

Sprecher nicht die Rede ist, aber außer den Ausdrücken auch ihre Designate berücksichtigt werden, gehört die Untersuchung zum Gebiet der Semantik. Schließlich gibt es Untersuchungen, die weder auf den Sprecher noch auf die Designate Bezug nehmen, sondern nur auf die Ausdrücke und ihre Form, d. h. die Art und Weise, wie die Ausdrücke aus Zeichen bestimmter Arten in bestimmter Reihenfolge zusammengesetzt sind. Solche Untersuchungen werden formal oder syntaktisch genannt und zum Gebiet der (logischen) Syntax gerechnet.

Eine pragmatische Beschreibung etwa der französischen Sprache gibt an, wie dieser oder jener Sprachgebrauch von den Umständen des Sprechers und seiner Umgebung abhängt. Bestimmte Ausdrucksweisen werden in einem bestimmten Zeitalter verwendet, später nicht mehr; sie werden verwendet, wenn der Sprecher bestimmte Vorstellungen und Gefühle hat, sie rufen im Hörer bestimmte Vorstellungen und Gefühle hervor; sie werden verwendet, wenn die Gesamtsituation, bestehend aus Sprecher, Hörer und Umgebung, gewisse Bedingungen erfüllt. In der Semantik der französischen Sprache wird von all diesem abgesehen. Die Beziehung zwischen den französischen Wörtern und zusammengesetzten Ausdrücken einerseits und ihren Designaten anderseits wird dargestellt etwa in Form eines Wörterbuches. Während die historischen, soziologischen und psychologischen Verhältnisse in bezug auf die Sprachgemeinschaft, in der die französische Sprache gesprochen wird, nur in der Pragmatik berücksichtigt werden, beschränkt sich die Semantik darauf, eine Deutung (Interpretation) dieser Sprache zu geben. Die semantische Beschreibung der französischen Sprache enthält alle Angaben, die nötig sind, um diese Sprache zu verstehen und richtig zu gebrauchen. Die syntaktische Beschreibung der französischen Sprache enthält noch weniger als die semantische. Sie gibt Regeln an, nach denen festgestellt werden kann, ob eine bestimmte Wortreihe ein Satz der französischen Sprache ist, wobei nicht vorausgesetzt wird, daß man den Satz versteht. Wie wir sehen werden, können in der Syntax auch Regeln aufgestellt werden, die gewisse logische Beziehungen zwischen Sätzen festlegen, z. B. die Beziehung der Ableitbarkeit.

Die Art der semantischen Analyse ist anders, wenn es sich nicht um die empirische Untersuchung einer historisch gegebenen Sprache handelt, sondern um den Aufbau einer künstlichen Sprache. Anstatt ,Sprache' sagen wir in diesem Fall oft ,Sprachsystem', um zu betonen, daß es sich hier nicht um eine natürliche Sprache, sondern um ein System von Regeln handelt. Wir werden in den folgenden Paragraphen Beispiele für zwei Arten von Sprachsystemen geben: ein syntaktisches System und ein semantisches System. (Wenn im folgenden von Ausdrücken und insbesondere von Zeichen und Sätzen eines Sprachsystems die Rede ist, so sind damit die Ausdrücke, Zeichen und Sätze der Objektsprache des Sprachsystems gemeint; wenn anderseits von den Regeln des Sprachsystems gesprochen wird, so sind die in der Metasprache formulierten Regeln, die von den Ausdrücken der Objektsprache handeln, gemeint.)

21. Formregeln des Kalküls B

21a. Die Sprache B. In **21—24** stellen wir die syntaktischen Regeln des Kalküls B auf, in **25** die Regeln des semantischen Systems B. Wir geben diesen beiden Systemen denselben Namen ‚B‘, weil sie dieselben Zeichen und dieselben aus diesen Zeichen bestehenden Sätze enthalten. Diese gemeinsamen Zeichen, Ausdrücke und Sätze der beiden Systeme nennen wir auch oft Zeichen, Ausdrücke und Sätze der Sprache B.

Die Sprache B ist so umfassend, daß alle Sätze der Sprache C, die im nächsten Kapitel C erklärt werden wird, in sie übersetzbar sind. Da alle Sätze der Sprache A auch in Sprache C enthalten sind, so sind auch alle Sätze von A übersetzbar in B. B enthält alle die Arten von Variablen, die in C vorkommen, aber nicht die Satzvariablen, die in A (nur in offenen Satzformeln, nicht in Sätzen) vorkommen. In B fehlen aber die meisten derjenigen logischen Konstanten der Sprachen A und C, die nicht wesentlich zur Ausdrucksfähigkeit dieser Sprachen beitragen, sondern hauptsächlich nur zur Bequemlichkeit und Kürze der Formulierungen dienen. Wir lassen diese Zeichen in B fort, um die syntaktischen und semantischen Regeln einfacher formulieren zu können.

B enthält als Grundzeichen die fünf Verknüpfungszeichen (3) und das Identitätszeichen für Ausdrücke aller Typen. [Die beiden Verknüpfungszeichen ‚$\sim$‘ und ‚**v**‘ würden genügen, da die andern drei mit Hilfe von L8—6g (6), j (1) und f (1) auf diese beiden zurückführbar sind. Ferner ist ‚=‘ entbehrlich nach D17—1 und Stufenerhöhung. Wir nehmen die genannten Zeichen nur darum als Grundzeichen in B, um die Grundsätze und Schlußregeln von B einfacher formulieren zu können.] B enthält Alloperatoren mit Variablen aller vorkommenden Arten; der Existenzoperator ist zurückführbar gemäß L14—2a (4) und Stufenerhöhung. B enthält ferner den λ-Operator. B enthält nicht diejenigen logischen Konstanten (meist Prädikate und Funktoren höherer Stufen), die in **17c—19** des vorigen Kapitels in Sprache A eingeführt worden sind und im nächsten Kapitel in Sprache C eingeführt werden (mit Ausnahme von ‚λ‘). Alle diese Konstanten sind auf die in B enthaltenen zurückführbar auf Grund der für sie angegebenen Definitionen oder sonstigen Umformungsregeln.

Die Formregeln für die Bildung von Ausdrücken verschiedener Arten und besonders von Sätzen gelten sowohl für den Kalkül B wie für das semantische System B. Diese Regeln sind in Übereinstimmung mit den meist nicht-formalen und oft ungenauen Erläuterungen, die in den Kapiteln A und C für das Vorkommen der verschiedenen Zeichen in Sätzen der Sprache A bzw. C gegeben werden.

Wir verwenden die folgenden Frakturzeichen, von denen einige schon früher vorgekommen sind, als Bezeichnungen in der Metasprache für Zeichen und Ausdrücke der Objektsprachen A, B und C: ‚$\mathfrak{a}$‘ für beliebige Zeichen, ‚$\mathfrak{v}$‘ für Variable; ‚$\mathfrak{A}$‘ für beliebige Ausdrücke, ‚$\mathfrak{S}$‘ für Satzformeln. Als Bezeichnung für ein bestimmtes Zeichen oder einen bestimmten Ausdruck verwenden wir ein Frakturzeichen mit einem

Zahlzeichen als unterem Index. So mag z. B. ‚$\mathfrak{a}_1$' als Bezeichnung für ‚*R*' dienen, ‚$\mathfrak{a}_2$' für ‚*a*', ‚$\mathfrak{a}_3$' für ‚*c*'; dann ist ‚$\mathfrak{a}_1(\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$' Bezeichnung für den Satz ‚$R(a, c)$'. Ein Frakturzeichen mit ‚*i*', ‚*j*' usw. als unterem Index wird verwendet, um in allgemeiner Weise über Ausdrücke zu sprechen. So schreiben wir z. B.: „Wenn $\mathfrak{v}_i$ in $\mathfrak{S}_j$ vorkommt, so ..." für: „Wenn eine gewisse (nicht angegebene) Variable in einer gewissen (nicht angegebenen) Satzformel vorkommt, so ...". ‚$\mathfrak{v}_i$', ‚$\mathfrak{S}_j$' usw. sind Variable der Metasprache; ‚$\mathfrak{v}_1$', ‚$\mathfrak{S}_2$' usw. sind entsprechende Konstanten der Metasprache.

21b. Das System der Typen. Jedes Zeichen der Sprache B gehört zu einer der folgenden Arten:

1. Verknüpfungszeichen: (a) einstellig (‚$\sim$'), (b) zweistellig (‚$\mathbf{v}$', ‚$\cdot$', ‚$\supset$', ‚$\equiv$').
2. Besondere Zeichen: ‚(', ‚)', ‚,', ‚=', ‚λ'.
3. Satzkonstanten.
4. Individualzeichen: (a) Konstanten, (b) Variable.
5. Prädikate: (a) Konstanten, (b) Variable.
6. Funktoren: (a) Konstanten, (b) Variable.

Die Zeichen der Arten 4b, 5b, 6b heißen Variable ($\mathfrak{v}$); alle andern Zeichen Konstanten. Die Zeichen der Arten 4, 5, 6 heißen Zeichen des Typensystems. Zu 2: nach den Regeln gibt es nur eine Art von Klammern; im praktischen Schreiben verwenden wir aber runde und eckige Klammern und Klammern verschiedener Größe, jedoch ohne syntaktischen Unterschied, nur zur Erleichterung des Lesens.

Jedes Zeichen wird entweder als Grundzeichen aufgestellt oder durch eine Definition eingeführt. Wir nehmen als Grundzeichen der Sprache B die angegebenen einzelnen Zeichen der Arten 1 und 2, sowie alle Variablen. Ferner lassen wir zu, daß nach Belieben irgendwelche Konstanten der Arten 3 bis 6 als Grundzeichen genommen werden. Es können nach Belieben irgendwelche weitere Konstanten dieser Arten durch Definitionen eingeführt werden. Über die Form solcher Definitionen werden später Regeln aufgestellt.

Die Individualausdrücke, Prädikatausdrücke und Funktorausdrücke werden nach folgenden Regeln in Stufen und weiter in Typen eingeteilt; wir nennen daher die Ausdrücke dieser Arten auch Ausdrücke des Typensystems.

1. Jeder Individualausdruck gehört zum Typus 0.

2. Ein zusammengesetzter *n*-stelliger Argumentausdruck $\mathfrak{A}_{i_1}$, $\mathfrak{A}_{i_2}$, .., $\mathfrak{A}_{i_n}$ ($n \geqq 2$), in dem $\mathfrak{A}_{i_1}$ den Typus t_{i_1}, $\mathfrak{A}_{i_2}$ t_{i_2}, .., $\mathfrak{A}_{i_n}$ t_{i_n} hat, hat den Typus $t_{i_1}, t_{i_2}, .. t_{i_n}$.

3. Ein Prädikatausdruck $\mathfrak{A}_i$, zu dem der ein- oder mehrstellige Argumentausdruck $\mathfrak{A}_j$ mit dem Typus t_j paßt, hat den Typus (t_j).

4. Ein Funktorausdruck $\mathfrak{A}_i$, zu dem der Argumentausdruck $\mathfrak{A}_j$ vom Typus t_j paßt, wobei der Vollausdruck $\mathfrak{A}_i$ $(\mathfrak{A}_j)$ den Typus t_k hat, hat den Typus $(t_j : t_k)$.

5. Wenn in der Typusbezeichnung für einen Ausdruck $\mathfrak{A}_i$ mindestens eine Ziffer ,0' durch n Paare von Klammern eingeschlossen ist und keine durch mehr als n, so gehört $\mathfrak{A}_i$ zur n-ten Stufe.

Beispiele. Nach (1) haben ,*a*', ,*x*', ,*mond*' (s. Beispiele **2c**) den Typus 0. Daher haben nach (2) die Argumentausdrücke ,*b*, *c*' und ,*x* ,*y*' den Typus 0, 0. Nach (3) hat ,*Kug*' den Typus (0), ,*Va*' den Typus (0, 0). In dem Satz ,*M* (*a*,*Kug*)' hat der Argumentausdruck ,*a*,*Kug*' den Typus 0,(0); also hat ,*M*' den Typus (0, (0)) und gehört nach (5) zur zweiten Stufe, während ,*Kug*' und ,*Va*' zur ersten Stufe gehören (in Übereinstimmung mit den früheren nicht-formalen Erläuterungen in **16**). ,0', ,1' usw. (D 17—3) sind Prädikate vom Typus ((0)) und von zweiter Stufe. Dagegen haben ,*Trans*' und ,*Sym*' (**16c**) den Typus ((0, 0)), weil passende Argumentausdrücke (z. B. ,*Va*') den Typus (0, 0) haben. — ,*prod* (*a*, *b*)' ist (in dem Beispiel in **18a**) ein Individualausdruck, hat also den Typus 0; ,*a*, *b*' hat den Typus 0, 0; also ist nach (4) ,*prod*' ein Funktor vom Typus (0, 0 : 0) und erster Stufe. ,*mem* (*Va*)' (D 18—3) ist ein Prädikatausdruck vom Typus (0), da ,*x*' als Argumentausdruck dazu paßt. Da ,*Va*' den Typus (0, 0) hat, so ist nach (4) ,*mem*' ein Funktor vom Typus ((0, 0) : (0)) und zweiter Stufe.

Aus den Regeln ergibt sich, daß ein bestimmter Prädikatausdruck stets nur Argumentausdrücke desselben Typus bei sich haben kann. Zwei Prädikatausdrücke $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_i'$ haben dann und nur dann denselben Typus, wenn sie (1) dieselbe Anzahl von Argumenten haben (beide mögen etwa zweistellig sein, so daß ihre Vollsätze die Formen $\mathfrak{A}_i$ $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{A}_k)$ und $\mathfrak{A}_i'$ $(\mathfrak{A}_j', \mathfrak{A}_k')$ haben), und (2) Argumentausdrücke entsprechender Stellen denselben Typus haben. [In dem genannten Beispiel müssen $\mathfrak{A}_j$ und $\mathfrak{A}_j'$ denselben Typus haben, ebenso $\mathfrak{A}_k$ und $\mathfrak{A}_k'$. Dagegen können $\mathfrak{A}_j$ und $\mathfrak{A}_k$ entweder denselben oder verschiedene Typen haben. Im ersten Fall heißt der Prädikatausdruck und die durch ihn bezeichnete Relation homogen, im zweiten Fall inhomogen. Im früheren Beispiel ist das Prädikat ,*M*' inhomogen.]

λ-Ausdrücke sind entweder Prädikat- oder Funktorausdrücke (sie werden in **33** ausführlich erklärt). Ein λ-Ausdruck hat die Form $(\lambda\, \mathfrak{A}_i)$ $(\mathfrak{A}_j)$, wobei $\mathfrak{A}_i$ entweder eine Variable oder eine Reihe von n verschiedenen, durch Kommata getrennten Variablen ist. Der Typus von $\mathfrak{A}_i$ sei t_i. $(\lambda\, \mathfrak{A}_i)$ heißt ein λ-Operator, $\mathfrak{A}_j$ der zugehörige Operand. Es gibt nun zwei Fälle. (1) $\mathfrak{A}_j$ ist eine Satzformel. In diesem Fall ist der λ-Ausdruck ein Prädikatausdruck vom Typus (t_i). (2) $\mathfrak{A}_j$ ist ein Ausdruck des Typensystems vom Typus t_j. In diesem Fall ist der λ-Ausdruck ein Funktorausdruck vom Typus $(t_i : t_j)$.

21c. Russells Antinomie. Die Unterscheidung der Typen ist von RUSSELL eingeführt worden, um die sogenannten logischen Antinomien zu vermeiden. Zu diesen Antinomien gehört z. B. die RUSSELLsche Antinomie des Begriffes derjenigen Eigenschaften, die sich selbst nicht zukommen. Solange keine Unterscheidungen zwischen Prädikaten verschiedener Stufen gemacht werden, wird man es als sinnvoll ansehen,

wenn von einer Eigenschaft *F* gesagt wird, sie komme sich selbst zu oder sie komme sich nicht zu. Man könnte dann in folgender Weise definieren: wir wollen von einer Eigenschaft, die sich selbst nicht zukommt, sagen, sie sei imprädikabel; in Symbolen: ‚$Impr\,(F) \equiv \sim F\,(F)$'. Wenn in dieser Definitionsformel für die freie Variable ‚F' das definierte Prädikat ‚$Impr$' selbst eingesetzt wird, so ergibt sich: ‚$Impr\,(Impr) \equiv \sim Impr\,(Impr)$'. Dieser Satz — wie jeder Satz der Form ‚$p \equiv \sim p$' — ist jedoch L-falsch. Die obige Definition führt somit zu einem Widerspruch. Dies ist die RUSSELLsche Antinomie. Wenn die Typenregel eingeführt wird, so wird der Ausdruck ‚$F\,(F)$' nicht als Satzformel zugelassen, da ein Prädikat immer von höherer Stufe sein muß als sein Argumentausdruck. Daher kann dann die obige Definition nicht mehr aufgestellt werden, und somit verschwindet die Antinomie.

Über die Antinomien vgl.: [P. M.] Band I, 60ff.; RUSSELL [Einführung] 138; RAMSEY [Foundations]; FRAENKEL [Einleitung] §§ 13—15, mit Literaturangaben; CARNAP [Antinomien], [Syntax E] § 60a—c. Über die Einteilung der Typen vgl. [P. M.] Band I, 39ff., 168ff.; RUSSELL [Einführung] 133ff.; RAMSEY [Foundations]. RUSSELL nahm ursprünglich eine weitere Unterteilung der Typen vor (das sogenannte verzweigte Typensystem); um gewisse damit verbundene Schwierigkeiten zu überwinden, mußte er dann das sogenannte Reduzibilitätsaxiom aufstellen. RAMSEY hat gezeigt, daß die weitere Unterteilung nicht notwendig ist, sondern daß die sogenannte einfache Typeneinteilung genügt (wie sie oben dargestellt ist). Damit wird das Reduzibilitätsaxiom überflüssig (vgl. [P. M.] Band I², S. XIV; RAMSEY [Foundations] 275ff.).

Mehrsortige Sprachen. Es ist zuweilen zweckmäßig, auch schon die nullte Stufe in mehrere Typen unterzuteilen, nämlich dann, wenn es mehrere verschiedene Arten von Individuen gibt, für die man nicht dieselben Prädikate als sinnvoll zulassen will. Eine Sprache mit *n* Individuentypen nennt man *n*-sortig. Die Mehrzahl der üblichen symbolischen Sprachen ist einsortig; eine Sprache, die Bezeichnungen für Gegenstände (z. B. Dinge, Punkte oder dergleichen) und Zahlausdrücke als Individualausdrücke verschiedener Typen enthält (wie z. B. die in **46c** für D19 bis 22 angewendete Sprachform) ist zweisortig. Wenn man in einem System der Geometrie die Geraden und Ebenen nicht als Klassen von Punkten darstellen will, sondern als Individuen, ist es nützlich, Punkte, Geraden und Ebenen als drei verschiedene Typen von Individuen zu nehmen, also eine dreisortige Sprache zu verwenden (wie in **47**).

Sprachsysteme ohne Typenunterscheidungen. In einem solchen System können Individuen, Klassen von Individuen, Klassen von Klassen von Individuen usw. als Werte derselben Variablen vorkommen und daher auch als Elemente derselben Klasse („inhomogene Klassen"). Solche Systeme sind in Anlehnung an Axiomensysteme der Mengenlehre konstruiert worden (vgl. das Axiomensystem von FRAENKEL in **43** und die dortigen Hinweise auf andere Systeme von v. NEUMANN, BERNAYS und GÖDEL). Logiksysteme dieser Form sind besonders von QUINE entwickelt und ausführlich untersucht worden ([Logistic], [Types], [Math. Logic]). Sprachsysteme dieser Art haben unter anderem den Vor-

teil, daß die später zu erwähnende Mehrheit der Arithmetiken (s. **29b**) vermieden wird. Anderseits scheint diese Sprachform unnatürlich in bezug auf nicht-logische Sätze; da auch für deskriptive Zeichen keine Typenunterscheidung vorgenommen wird, so werden Formeln, die den folgenden Wortsätzen entsprechen, in diesen Systemen als sinnvolle Sätze zugelassen: „Die Zahl 5 ist blau“, „Die Relation Freundschaft wiegt 3 kg“, „5% derjenigen Primzahlen, deren Vater der Temperaturbegriff und deren Mutter die Zahl 5 ist, sterben innerhalb einer Zeit von 3 Jahren + 5 kg + 7 cm nach ihrer Geburt entweder an Typhus oder an der Quadratwurzel aus einer demokratischen Staatsverfassung“. Über die Möglichkeit, die genannten Nachteile beider Sprachformen durch die Verwendung transfiniter Stufen zu vermeiden, vgl. **29b.**

Das Typensystem kann erweitert werden durch Einbeziehung von Sätzen. Angenommen, man schreibt den Satzformeln den Typus s zu und rechnet sie zur Stufe 0. Dann sind die Verknüpfungszeichen Prädikate erster Stufe; ein einstelliges hat den Typus (s), ein zweistelliges (s, s). Ferner kann man auch die Operatorzeichen (in Sprache C) einbeziehen. Einem solchen Zeichen $\mathfrak{a}_i$ schreibt man etwa den Typus $(t_j; t_k; t_l)$ zu, falls $(\mathfrak{a}_i\ \mathfrak{A}_j)(\mathfrak{A}_k)$ den Typus t_l hat, wo $\mathfrak{A}_j$ eine Variable oder eine Reihe von durch Kommata getrennten Variablen ist und den Typus t_j hat und $\mathfrak{A}_k$ den Typus t_k hat. Dann hat z. B. ‚$\exists$‘ in ‚$(\exists\ x)(\ldots)$‘ den Typus $(0; s; s)$; ‚$\imath$‘ (**35**) den Typus $(0; s; 0)$; ‚λ‘ in ‚$(\lambda\ x, y)\,(prod\,(x, y))$‘ den Typus $(0, 0; 0; (0, 0 : 0))$.

21d. Satzformeln und Sätze in B. Ein Ausdruck der Sprache B heißt eine Satzformel ($\mathfrak{S}$), wenn er eine der folgenden Formen (1) bis (6) hat.

1. Eine Satzkonstante.
2. $\mathfrak{A}_i\,(\mathfrak{A}_j)$, wo $\mathfrak{A}_j$ einen beliebigen Typus t_j hat und $\mathfrak{A}_i$ den Typus (t_j) hat (also ein Prädikatausdruck ist).
3. $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_j$, wo $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_j$ Ausdrücke desselben Typus sind.
4. $\sim(\mathfrak{S}_i)$, wo $\mathfrak{S}_i$ eine Satzformel ist.
5. $(\mathfrak{S}_i)\ \mathfrak{a}_k\ (\mathfrak{S}_j)$, wo $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ Satzformeln sind und $\mathfrak{a}_k$ eines der Zeichen ‚$\vee$‘, ‚.‘, ‚$\supset$‘ oder ‚$\equiv$‘ ist.
6. $(\mathfrak{v}_i)\,(\mathfrak{S}_j)$, wo $\mathfrak{S}_j$ eine Satzformel ist.

$\mathfrak{v}_i$ stehe an einer bestimmten Stelle in $\mathfrak{A}_j$. Wir sagen, $\mathfrak{v}_i$ sei an dieser Stelle in $\mathfrak{A}_j$ gebunden, wenn $\mathfrak{A}_j$ oder ein Teilausdruck von $\mathfrak{A}_j$, der diese Stelle enthält, die Form $(\mathfrak{v}_i)\,(\mathfrak{S}_k)$ oder $(\lambda\ \mathfrak{A}_i)\,(\mathfrak{A}_k)$ hat, wo $\mathfrak{A}_i$ entweder $\mathfrak{v}_i$ oder eine Reihe von durch Kommata getrennten Variablen, unter denen $\mathfrak{v}_i$ vorkommt, und $\mathfrak{A}_k$ eine Satzformel oder ein Ausdruck des Typensystems ist. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so heißt $\mathfrak{v}_i$ an der betreffenden Stelle in $\mathfrak{A}_j$ frei. Die erwähnten Teilausdrücke $(\mathfrak{v}_i)$ und $(\lambda\ \mathfrak{A}_i)$ heißen Operatoren, $\mathfrak{S}_k$ und $\mathfrak{A}_k$ sind die zugehörigen Operanden. Kommt in $\mathfrak{A}_j$ mindestens eine in $\mathfrak{A}_j$ freie Variable vor, so heißt $\mathfrak{A}_j$ offen, andernfalls geschlossen. Eine geschlossene Satzformel heißt ein Satz.

Die aufgestellten Formregeln für Ausdrücke des Typensystems und Satzformeln beziehen sich auf eine vollständige Schreibung mit allen Klammern. In der Praxis werden wir dagegen, wie üblich, die Klammern oft weglassen, gemäß den früher aufgestellten Regeln (**3c** und **9a**).

21e. Definitionen in B. Eine Definition im Kalkül B ist ein Satz von der Form $\mathfrak{a}_i \equiv \mathfrak{S}_j$ oder $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{A}_j$, wo das Definiendum $\mathfrak{a}_i$ die zu definierende Konstante ist und das Definiens $\mathfrak{S}_j$ bzw. $\mathfrak{A}_j$ ein geschlossener Ausdruck ist, der nur Grundzeichen oder solche definierten Zeichen enthält, die schon vor Aufstellung dieser Definition definiert worden sind.

Im Kalkül B ist es durch die Benützung des λ-Operators möglich, allen Definitionen die genannte einfache Form zu geben, bei der das Definiendum nur aus dem neuen Zeichen besteht. In andern Sprachsystemen ist es häufig üblich, offene Satzformeln als Definitionen zuzulassen, wobei das Definiendum außer der neuen Konstanten noch Variable enthält. [In diesem Fall ist gefordert, daß jede Variable im Definiendum frei ist und nicht mehr als einmal vorkommt und daß im Definiens keine Variable frei vorkommt, die nicht auch im Definiendum frei vorkommt; vgl. [Syntax] 8.] So haben wir z. B. in Sprache A den Funktor ‚mem_1' durch die offene Definitionsformel ‚$mem_1(H)(x) \equiv (\exists y) Hxy$' eingeführt (D18—1). In B können wir statt dessen den Definitionssatz ‚$mem_1 = (\lambda H) [(\lambda x) [(\exists y) Hxy]]$' aufstellen (vgl. **33a**, Beispiel 2). Aus ihm ergibt sich, wie wir sehen werden (**33c**): ‚$(x)(H) [mem_1(H)(x) \equiv (\exists y) Hxy]$'. Beide Formen der Definition führen daher zu denselben Ergebnissen. In Sprache C kann ebenfalls die Form der Definitionen mit dem λ-Operator verwendet werden. Wir werden jedoch meist statt dessen offene Definitionsformeln verwenden, weil sie leichter verständlich sind.

22. Umformungsregeln des Kalküls B

22a. Grundsatzschemata. Die im vorigen Paragraphen aufgestellten Formregeln gelten sowohl für den Kalkül B wie für das semantische System B. Jetzt wollen wir die Umformungsregeln aufstellen, die den wesentlichen Bestandteil des Kalküls B ausmachen. Sie bestehen aus Grundsätzen und Schlußregeln. Auf der Basis der Grundsätze können mit Hilfe der Schlußregeln weitere Sätze bewiesen werden, und aus irgendwelchen gegebenen Sätzen können andere Sätze abgeleitet werden; das wird im nächsten Paragraphen gezeigt. Die Grundsätze und Schlußregeln sind im Einklang mit der beabsichtigten Deutung, wie sie in den früheren nicht-formalen Erläuterungen der Sprache A angegeben worden ist (und für den λ-Operator später in **33** angegeben werden wird). Diese Deutung wird später in dem semantischen System genau und systematisch dargestellt (**25**). Die Frage der Übereinstimmung des Kalküls mit der Deutung kann darnach genauer gestellt und beantwortet werden (**26**). Die Umformungsregeln selbst dürfen aber natürlich in keiner Weise auf die Deutung Bezug nehmen. Sie sind ja als syntaktische Regeln gemeint und müssen daher streng formal formuliert werden.

Jeder Satz von B, der eine der folgenden Formen G1 bis G12 hat, heißt ein Grundsatz des Kalküls B. ‚( )' deutet eine Reihe von Alloperatoren für alle in dem Operanden frei vorkommenden Variablen an (wenn keine freien Variablen vorkommen, verschwindet ‚( )').

Satzkalkül:

G1. $(\ )\ [\mathfrak{S}_i \vee \mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_i]$.
G2. $(\ )\ [\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_i \vee \mathfrak{S}_j]$.
G3. $(\ )\ [\mathfrak{S}_i \vee \mathfrak{S}_j \supset \mathfrak{S}_j \vee \mathfrak{S}_i]$.
G4. $(\ )\ [(\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j) \supset [\mathfrak{S}_k \vee \mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_k \vee \mathfrak{S}_j]]$.

Alloperatoren:

G5. Spezialisierung. $(\ )\ [(\mathfrak{v}_i)(\mathfrak{S}_j) \supset \mathfrak{S}_k]$, wo $\mathfrak{S}_k$ aus $\mathfrak{S}_j$ gebildet ist, indem für die Variable $\mathfrak{v}_i$ an allen Stellen, an denen sie in $\mathfrak{S}_j$ frei vorkommt, ein zu demselben Typus gehöriger Ausdruck $\mathfrak{A}_i$ eingesetzt wird; $\mathfrak{A}_i$ darf keine freie Variable enthalten, die an einer der Einsetzungsstellen in $\mathfrak{S}_j$ gebunden sein würde.

G6. Verteilung des Alloperators.
$(\ )\ [(\mathfrak{v}_i)(\mathfrak{S}_j \supset \mathfrak{S}_k) \supset [(\mathfrak{v}_i)(\mathfrak{S}_j) \supset (\mathfrak{v}_i)(\mathfrak{S}_k)]]$.

G7. Leerlaufender Alloperator. $(\ )\ [\mathfrak{S}_k \supset (\mathfrak{v}_i)(\mathfrak{S}_k)]$, wo $\mathfrak{v}_i$ in $\mathfrak{S}_k$ nicht frei vorkommt.

Identität:

G8. $(\mathfrak{v}_i)(\mathfrak{v}_j)\,[(\mathfrak{v}_i = \mathfrak{v}_j) \equiv (\mathfrak{v}_k)(\mathfrak{v}_k(\mathfrak{v}_i) \supset \mathfrak{v}_k(\mathfrak{v}_j))]$, wo $\mathfrak{v}_k$ eine einstellige Prädikatvariable ist.

Extensionalität (vgl. **29c**):

G9. $(\mathfrak{v}_i)(\mathfrak{v}_j)\,[(\mathfrak{v}_{k_1})(\mathfrak{v}_{k_2}) \dots (\mathfrak{v}_{k_n})(\mathfrak{v}_i(\mathfrak{v}_{k_1}, \mathfrak{v}_{k_2}, .., \mathfrak{v}_{k_n})$ $\mathfrak{a}_l\ \mathfrak{v}_j(\mathfrak{v}_{k_1}, \mathfrak{v}_{k_2}, .., \mathfrak{v}_{k_n})) \supset \mathfrak{v}_i = \mathfrak{v}_j]$; hierbei sind entweder (a) $\mathfrak{v}_i$ und $\mathfrak{v}_j$ n-stellige Prädikatvariable ($n \geqq 1$) und $\mathfrak{a}_l$ ist ‚$\equiv$', oder (b) $\mathfrak{v}_i$ und $\mathfrak{v}_j$ sind n-stellige Funktorvariable und $\mathfrak{a}_l$ ist ‚$=$'.

λ-Operator (vgl. **33**):

G10. $(\ )\ [(\lambda\, \mathfrak{v}_{k_1}, \mathfrak{v}_{k_2}, .., \mathfrak{v}_{k_n})(\mathfrak{A}_i)(\mathfrak{v}_{l_1}, \mathfrak{v}_{l_2}, .., \mathfrak{v}_{l_n})\ \mathfrak{a}_j\ (\mathfrak{A}_k)]$; die $\mathfrak{v}_{k_m}$ ($m = 1$ bis n, $n \geqq 1$) sind n verschiedene Variable beliebiger Typen und die $\mathfrak{v}_{l_m}$ sind n andere verschiedene Variable, die nicht in Operatoren in $\mathfrak{A}_i$ vorkommen; für jedes m hat $\mathfrak{v}_{l_m}$ denselben Typus wie $\mathfrak{v}_{k_m}$; $\mathfrak{A}_i$ ist entweder eine Satzformel und $\mathfrak{a}_j$ ist ‚$\equiv$' oder $\mathfrak{A}_i$ ist ein Ausdruck des Typensystems und $\mathfrak{a}_j$ ist ‚$=$'; $\mathfrak{A}_k$ ist aus $\mathfrak{A}_i$ gebildet, indem für jedes m von 1 bis n $\mathfrak{v}_{l_m}$ für $\mathfrak{v}_{k_m}$ eingesetzt wird.

Auswahlprinzip:

G11. $(\mathfrak{v}_i)\,[(\mathfrak{v}_j)\,[\mathfrak{v}_i(\mathfrak{v}_j) \supset \sim(\mathfrak{v}_l)(\sim \mathfrak{v}_j(\mathfrak{v}_l))] \,.\, (\mathfrak{v}_j)(\mathfrak{v}_k)\,[\mathfrak{v}_i(\mathfrak{v}_j) \,.\, \mathfrak{v}_i(\mathfrak{v}_k)$ $.\ \sim(\mathfrak{v}_l) \sim(\mathfrak{v}_j(\mathfrak{v}_l) \,.\, \mathfrak{v}_k(\mathfrak{v}_l)) \supset (\mathfrak{v}_m)(\mathfrak{v}_j(\mathfrak{v}_m) \equiv \mathfrak{v}_k(\mathfrak{v}_m))]$ $\supset \sim(\mathfrak{v}_k) \sim(\mathfrak{v}_j)\,[\mathfrak{v}_i(\mathfrak{v}_j) \supset \sim(\mathfrak{v}_m) \sim(\mathfrak{v}_n)(\mathfrak{v}_j(\mathfrak{v}_n) \,.\, \mathfrak{v}_k(\mathfrak{v}_n)$ $\equiv (\mathfrak{v}_n = \mathfrak{v}_m))]]$; hierbei haben $\mathfrak{v}_l$, $\mathfrak{v}_m$ und $\mathfrak{v}_n$ denselben beliebigen Typus, etwa t_l; $\mathfrak{v}_j$ und $\mathfrak{v}_k$ sind Prädikatvariable des Typus (t_l), und $\mathfrak{v}_i$ ist eine Prädikatvariable des Typus $((t_l))$.

Anzahl der Individuen:

G12, s. Bemerkung unten und **37e**.

22b. Erläuterungen zu einigen Grundsätzen. Die Liste nennt nicht einzelne Grundsätze, sondern Grundsatzschemata; sie beschreiben Satzformen mit den Mitteln der Metasprache. Alle die (unendlich vielen) Sätze der angegebenen Formen sind Grundsätze. Anstatt der Schemata G1 bis G4 könnte man, wenn man Satzvariable zuläßt, vier einzelne Satzformeln aufstellen (‚$p \vee p \supset p$' usw.). Die Schemata G5 bis G11 sind dagegen notwendig; sie können nicht durch einzelne Formeln ersetzt werden, weil jedes Schema sich auf unendlich viele Typen bezieht. — **G1 bis G4** zusammen mit den beiden Schlußregeln (s. unten) bilden den Satzkalkül (oder Aussagenkalkül). Mit Hilfe dieser Grundsätze und Schlußregeln ist jeder tautologische Satz (**5a**) der Sprache B beweisbar, und für jede tautologische offene Satzformel $\mathfrak{S}_i$, die zur Sprache B gehört (also keine Satzvariable enthält), ist $(\ )(\mathfrak{S}_i)$ beweisbar. — **G5** ist das Grundsatzschema der Spezialisierung. Für eine Individualvariable darf eine Individualkonstante oder eine Individualvariable eingesetzt werden (z. B. ‚$(x)(Px) \supset Pa$' und ‚$(y)[(x)(Px) \supset Py]$'). Für eine Prädikatvariable ist hier nur einfache Einsetzung, nicht Formeleinsetzung, zugelassen (**12c**). Für eine Prädikatvariable darf ein geschlossener oder offener Prädikatausdruck eingesetzt werden, z. B. ein Prädikat oder eine Prädikatvariable oder ein λ-Prädikatausdruck. An die Stelle der früheren Formeleinsetzung tritt hier die einfache Einsetzung eines λ-Ausdrucks (s. unten, **33**). Für eine Funktorvariable darf ein geschlossener oder offener Funktorausdruck eingesetzt werden, z. B. ein Funktor oder eine Funktorvariable oder ein λ-Funktorausdruck. — **G6** entspricht dem früheren L14—1d (1), bezieht sich aber auf beliebige Typen. — **G7**, das selten angewendet wird, erlaubt z. B. die Ableitung von ‚$(x)(Pa)$' aus ‚Pa'. — Folgende Sätze sind Beispiele von Grundsätzen der Art **G8**:

‚$(x)(y)[x = y \equiv (F)(Fx \supset Fy)]$' ($\mathfrak{S}_1$); ‚$(F)(G)[F = G \equiv (N)(N(F) \supset N(G))]$' ($\mathfrak{S}_2$); ‚$(f)(g)[f = g \equiv (N)(N(f) \supset N(g))]$' ($\mathfrak{S}_3$)

mit Funktorvariablen ‚f' und ‚g'. In B, wo das Identitätszeichen ein Grundzeichen ist, tritt $\mathfrak{S}_1$ an die Stelle der Definition dieses Zeichens mit Individualausdrücken in A (s. D17—1a); analog $\mathfrak{S}_2$ für Prädikatausdrücke erster Stufe und $\mathfrak{S}_3$ für Funktorausdrücke erster Stufe. Ebenso gelten analoge Sätze für Ausdrücke aller andern Typen. Allgemein gesprochen, gelten nach G8 Individuen, Attribute und Funktionen beliebiger Typen als identisch, wenn sie in allen Eigenschaften übereinstimmen. Z. B. sind zwei physische Körper a und b identisch, wenn sie alle Eigenschaften gemein haben, darunter auch die raum-zeitlichen Lagebeziehungen zu andern Körpern. — Folgender Satz ist ein Beispiel des Auswahlprinzips **G11** für die niedrigste Stufe (wobei wir zum leichteren Verständnis ‚$(\exists x)$' anstatt ‚$\sim (x) \sim$' schreiben):

‚$(N)[(F)[N(F) \supset (\exists x) Fx] . (F)(G)[N(F) . N(G) . (\exists x)(Fx . Gx) \supset (x)(Fx \equiv Gx)] \supset (\exists H)(F)[N(F) \supset (\exists x)(y)(Fy . Hy \equiv y = x)]]$'.

Dies besagt (in Klassenterminologie) Folgendes: Wenn N eine Klasse zweiter Stufe ist, derart, daß die Elementklassen von N nicht-leer und

gegenseitig elementfremd sind, so gibt es eine Auswahlklasse von N, d. h. eine Klasse H, die mit jeder Elementklasse von N genau ein Individuum gemein hat. Nach G 11 gilt Analoges auch für beliebige andere Typen. Das Auswahlprinzip ist zuerst von ZERMELO aufgestellt worden. Über die vieldiskutierten Probleme, die mit ihm zusammenhängen, vgl. [P. M.] I 536 ff.; RUSSELL [Einführung] 123 ff.; FRAENKEL [Grundlagen] 80 ff., [Einleitung] 288 ff. mit ausführlicher Diskussion und Literaturangaben. — Als **G 12** ist ein Grundsatz aufzustellen, der die Anzahl der Individuen des Objektbereiches der Sprache B angibt. Dieser Grundsatz hängt also von der Wahl des Bereiches ab. Er besagt aber nichts über den Inhalt des Bereiches, sondern nur über seine Struktur. Für die meisten Axiomensysteme ist es zweckmäßig zu bestimmen, daß der Bereich nicht endlich ist, mit andern Worten, daß er mindestens abzählbar ist, d. h. daß seine Kardinalzahl mindestens $\aleph_0$ ist (Unendlichkeitsaxiom, s. **37 e**). Für gewisse ASe dagegen — z. B. projektive oder metrische (euklidische oder nicht-euklidische) Geometrien in ihrer üblichen Form — ist eine höhere Kardinalzahl erforderlich, nämlich die des Kontinuums. Um wenigstens ein Beispiel für einen Grundsatz der Anzahl anzugeben, nehmen wir die Kardinalzahl 2, da der Grundsatz hier in einfacher Weise in Grundzeichen der Sprache B formuliert werden kann: ‚$\sim (x)\,(y)\,[x = y \vee \sim (z)\,(z = x \vee z = y)]$', in Worten: „Es gibt genau zwei Individuen". (In Sprache A ist der genannte Satz L-äquivalent mit ‚$(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,[x \neq y \,.\, (z)\,(z = x \vee z = y)]$'; vgl. **17 c**.)

Wie früher erwähnt, setzen wir stets voraus, daß der Individuenbereich nicht-leer ist, wie es auch in andern Logiksystemen üblich ist. Demgemäß ist z. B. ‚$(x)Fx \supset (\exists\, x)Fx$' L-wahr in A (L 14—1 c), und daher auch (durch Einsetzung von ‚$Gx \vee \sim Gx$' bzw. ‚$x = x$' für ‚Fx') die Sätze ‚$(\exists\, x)\,(Gx \vee \sim Gx)$' und ‚$(\exists\, x)\,(x = x)$', die man als Formulierungen für den Wortsatz „Es gibt mindestens ein Individuum" auffassen kann. Im Kalkül B sind die entsprechenden Sätze ‚$\sim (x) \sim (Gx \vee \sim Gx)$' und ‚$\sim (x) \sim (x = x)$' beweisbar. Der Umstand, daß hier eine Existenzannahme in das logische Fundament des Systems eingebaut ist, erscheint unbedenklich, zumindest soweit es sich um die praktische Anwendung des logischen Systems in einer wissenschaftlichen Theorie oder in einem Axiomensystem handelt, da es kaum jemals erforderlich ist, leere Bereiche mit in Betracht zu ziehen. Falls man jedoch das logische System von solchen Existenzannahmen freizumachen wünscht, muß man die Regeln in gewisser Weise ändern (vgl. [Syntax E] § 38 a).

22 c. Schlußregeln.

R 1. Implikationsregel (Abtrennungsregel, Modus Ponens). Aus $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j$ ist $\mathfrak{S}_j$ unmittelbar ableitbar.

R 2. Regel der Verknüpfungszeichen. $\mathfrak{S}_j$ ist unmittelbar ableitbar aus $\mathfrak{S}_i$, wenn $\mathfrak{S}_j$ dadurch aus $\mathfrak{S}_i$ entsteht, daß ein Ausdruck $\mathfrak{A}_i$ an einer Stelle durch $\mathfrak{A}_j$ ersetzt wird, oder umgekehrt, wobei eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a. $\mathfrak{A}_i$ ist $\mathfrak{S}_k \supset \mathfrak{S}_l$; $\mathfrak{A}_j$ ist $\sim \mathfrak{S}_k \vee \mathfrak{S}_l$.

b. $\mathfrak{A}_i$ ist $\mathfrak{S}_k \,.\, \mathfrak{S}_l$; $\mathfrak{A}_j$ ist $\sim (\sim \mathfrak{S}_k \vee \sim \mathfrak{S}_l)$.

c. $\mathfrak{A}_i$ ist $\mathfrak{S}_k \equiv \mathfrak{S}_l$; $\mathfrak{A}_j$ ist $(\mathfrak{S}_k \supset \mathfrak{S}_l) \,.\, (\mathfrak{S}_l \supset \mathfrak{S}_k)$.

Erläuterungen zu den Schlußregeln. R1 ist in Übereinstimmung mit den Wahrheitstafeln in Sprache A: $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j$ zusammen L-implizieren $\mathfrak{S}_j$ (L6—14a). — R2 führt die Verknüpfungszeichen ‚$\supset$', ‚.' und ‚$\equiv$' auf ‚$\sim$' und ‚$\vee$' zurück, in Übereinstimmung mit den Wahrheitstafeln dieser Zeichen in Sprache A (vgl. L8—6j (1), g (6) und f (1)). Man könnte Sprache B auf ‚$\sim$' und ‚$\vee$' beschränken; dann würde R2 fortfallen.

23. Beweise und Ableitungen im Kalkül B

23a. Beweise. Wenn man einen Kalkül aufbaut, so hat man gewöhnlich eine bestimmte Deutung im Auge, die die Auswahl der Regeln des Kalküls motiviert, aber im Kalkül selbst nicht auftritt. Man wählt die Grundsätze des Kalküls so, daß sie bei der beabsichtigten Deutung wahre Sätze sind, und die Schlußregeln so, daß sie von wahren Sätzen stets wieder auf wahre Sätze führen. So sind dann alle Sätze, die man im Kalkül „beweisen", d. h. durch Verwendung von Grundsätzen und Schlußregeln gewinnen kann, in der beabsichtigten Deutung wahr. Die Auswahl der Grundsätze und Schlußregeln kann in sehr verschiedener Weise getroffen werden, auch wenn dieselbe Gesamtmenge von Sätzen beweisbar sein soll. Die Auswahl wird nach technischen Gesichtspunkten getroffen, z. B. Einfachheit in der Verwendung in Beweisen und Ableitungen. Es ist keineswegs gefordert, daß die ausgewählten Grundsätze in irgend einer logischen oder erkenntnistheoretischen Hinsicht einen Vorzugscharakter besitzen.

Unter einem Beweis in einem Kalkül versteht man nicht eine Gedankenkette bestimmter Art, sondern eine Reihe von Sätzen, die in einem gewissen Sinn einer derartigen Gedankenkette entspricht. Innerhalb eines Kalküls kann aber die Korrektheit eines Schrittes, der von vorangehenden Sätzen der Kette zu einem weiteren führt, nicht daran geprüft werden, ob dieser Schritt als Schluß innerhalb einer Gedankenreihe einleuchtend sein würde, sondern nur daran, ob er im Einklang mit den Umformungsregeln des Kalküls steht. Die Grundsätze können nach Belieben in einem Beweis verwendet werden; ebenso irgendwelche nach Belieben aufgestellten Definitionen — sofern sie die früher für Definitionen aufgestellten Formregeln erfüllen —, da sie ja nur Konventionen über die Verwendung neuer Zeichen darstellen. Die Schlußregeln eines Kalküls geben an, unter welchen Bedingungen ein Satz aus einem oder mehreren anderen Sätzen unmittelbar ableitbar ist. Dadurch machen die Schlußregeln es möglich, von Grundsätzen oder Definitionen ausgehend zu neuen Sätzen fortzuschreiten. Demgemäß definiert man wie folgt: ein Beweis in einem Kalkül ist eine (endliche) Reihe von Sätzen, derart, daß jeder Satz der Reihe entweder ein Grundsatz oder eine Defi-

nition ist oder unmittelbar ableitbar ist aus Sätzen, die ihm in der Reihe vorangehen. Den letzten Satz eines Beweises nennt man einen beweisbaren Satz. Ist die Negation eines Satzes beweisbar, so heißt der Satz widerlegbar. Ist ein Satz entweder beweisbar oder widerlegbar, so heißt er entscheidbar; andernfalls unentscheidbar.

Beispiel eines Beweises im Kalkül B. Die Angaben am linken Rand gehören streng genommen nicht zum Beweis selbst, sondern sollen nur die Nachprüfung der Korrektheit des Beweises erleichtern, indem sie darauf hinweisen, daß ein bestimmter Grundsatz oder eine bestimmte Definition vorliegt oder daß eine bestimmte Schlußregel auf bestimmte vorangegangene Sätze angewendet wird.

G1	$A \vee A \supset A$	(1)
G4 (mit ‚$A \vee A$' als $\mathfrak{S}_i$, ‚A' als $\mathfrak{S}_j$ und ‚$\sim A$' als $\mathfrak{S}_k$)	$(A \vee A \supset A) \supset [\sim A \vee (A \vee A) \supset \sim A \vee A]$	(2)
(1), (2), R1	$\sim A \vee (A \vee A) \supset \sim A \vee A$	(3)
(3), R2a	$(A \supset A \vee A) \supset \sim A \vee A$	(4)
G2	$A \supset A \vee A$	(5)
(5), (4), R1	$\sim A \vee A$	(6)
(6), R2a	$A \supset A$	(7)
G3	$\sim A \vee A \supset A \vee \sim A$	(8)
(6), (8), R1	$A \vee \sim A$	(9)

Da man den Beweis nach Belieben bei (6), (7) oder (9) abbrechen kann, so sind die Sätze ‚$\sim A \vee A$', ‚$A \supset A$' und ‚$A \vee \sim A$' beweisbar.

23b. Ableitungen. Die Grundsätze und Schlußregeln eines Kalküls können nicht nur dazu verwendet werden, um Beweise aufzustellen, d. h. um zu zeigen, daß gewisse Sätze beweisbar — und daher in der beabsichtigten Deutung wahr — sind. Man kann die Umformungsregeln auch so verwenden, daß man aus irgendwelchen gegebenen (gewöhnlich nichtbeweisbaren) Sätzen andere Sätze ableitet. Die Ausgangssätze nennt man die Prämissen der Ableitung. Wir definieren: eine Ableitung mit bestimmten Prämissen in einem gegebenen Kalkül ist eine (endliche) Reihe von Sätzen, von denen jeder entweder eine der Prämissen oder ein Grundsatz oder eine Definition ist oder unmittelbar ableitbar ist aus Sätzen, die ihm in der Reihe vorangehen. Ist $\mathfrak{S}_n$ letzter Satz einer Ableitung mit den Prämissen $\mathfrak{S}_i$, .. $\mathfrak{S}_k$, so heißt $\mathfrak{S}_n$ ableitbar aus $\mathfrak{S}_i$, .. $\mathfrak{S}_k$.

Beispiele von Ableitungen.

1. Prämisse:	$A \vee B$	(1)
G3	$A \vee B \supset B \vee A$	(2)
(1) (2) R1	$B \vee A$	(3)

Somit ist ‚$B \vee A$' ableitbar aus ‚$A \vee B$'; allgemein: Aus $\mathfrak{S}_i \vee \mathfrak{S}$ ist $\mathfrak{S}_j \vee \mathfrak{S}_i$ ableitbar.

2. Prämissen:	1. A	(1)
	2. $\sim A$	(2)
G2	$\sim A \supset \sim A \vee B$	(3)
(2) (3) R1	$\sim A \vee B$	(4)
(4) R2a	$A \supset B$	(5)
(1) (5) R1	B	(6)

Somit ist ‚B' (ein beliebig gewählter Satz) ableitbar aus ‚A' und ‚$\sim A$'. Allgemein: Aus $\mathfrak{S}_i$ und $\sim \mathfrak{S}_i$ ist jeder beliebige Satz ableitbar.

3. Prämisse:	$(x)\ Px$	(1)
G5	$(x)\ Px \supset Pa$	(2)
(1) (2) R1	Pa	(3)

Somit ist ‚Pa' aus ‚$(x)\ Px$' ableitbar. Diese Operation wird Spezialisierung genannt.

4. Prämisse:	$(x)\ Px$	(1)
G7	$(x)\ Px \supset (y)\ (x)\ Px$	(2)
(1) (2) R1	$(y)\ (x)\ Px$	(3)
G5	$(y)\ [(x)\ (Px) \supset Py]$	(4)
G6	$(y)\ [(x)\ (Px) \supset Py] \supset [(y)\ (x)\ Px \supset (y)\ Py]$	(5)
(4) (5) R1	$(y)\ (x)\ Px \supset (y)\ Py$	(6)
(3) (6) R1	$(y)\ Py$	(7)

Somit ist ‚$(y)\ Py$' ableitbar aus ‚$(x)\ Px$'. Diese Operation haben wir früher die Umschreibung einer gebundenen Variablen genannt (L12—2a).

24. Lehrsätze über Beweisbarkeit und Ableitbarkeit

24a. Allgemeine Lehrsätze über den Kalkül B.

L24—1. Ist $\mathfrak{S}_i$ ableitbar aus Sätzen, von denen jeder beweisbar ist, so ist $\mathfrak{S}_i$ auch beweisbar.

L24—2. Aus $\mathfrak{S}_i$ und $\sim \mathfrak{S}_i$ ist jeder beliebige Satz ableitbar (**23b**, Beispiel 2).

L24—3. Ist $\sim \mathfrak{S}_i$ beweisbar, so ist aus $\mathfrak{S}_i$ jeder beliebige Satz ableitbar. (Aus L2.)

L24—4. Ist $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j$ beweisbar, so ist $\mathfrak{S}_j$ ableitbar aus $\mathfrak{S}_i$.

L24—5. Ist $\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j$ beweisbar, so sind $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ ableitbar auseinander.

L24—6. **a.** Jeder tautologische Satz (**5a**) ist beweisbar.

b. Ist ein Satz auf Grund der Wahrheitstafeln von einem oder mehreren anderen Sätzen L-impliziert, so ist er aus ihnen ableitbar. — [Einen Beweis für einen beliebig vorgegebenen tautologischen Satz kann man mit Hilfe der Methode der konjunktiven Normalform aufstellen (vgl. Hilbert [Logik] und Carnap [Syntax E], § 34b, RR2).]

Es gilt noch allgemeiner: alle Lehrsätze über Sprache A (s. besonders **8**, **13**, **14** und **15a**) gelten in entsprechender Weise für den Kalkül B. Damit ist Folgendes gemeint: 1. Alle Sätze der Sprache A, von denen früher angegeben worden ist, daß sie L-wahr sind, sind im Kalkül B beweisbar (soweit sie Sätze von B sind, andernfalls ihre Übersetzungen). 2. Ist früher angegeben worden, daß ein gewisser Satz der Sprache A von gewissen andern Sätzen L-impliziert ist, so ist er im Kalkül B aus ihnen ableitbar. Hierbei ist besonders auch der Lehrsatz der Stufenerhöhung (L16—1) mit in Betracht zu ziehen.

24b. Ersetzbarkeit. Wie früher in der Sprache A (L15—3), gilt auch hier im Kalkül B die Ersetzbarkeit von äquivalenten Formeln in einer Satzformel. Dieselbe Ersetzbarkeit gilt hier aber auch in einem Ausdruck des Typensystems, der eine Satzformel enthält, z. B. in einem λ-Prädikatausdruck der Form $(\lambda\, \mathfrak{v}_i)\,(\mathfrak{S}_j)$. Ferner gilt die Ersetzbarkeit von Ausdrücken des Typensystems auf Grund eines Identitätssatzes innerhalb einer Satzformel (entsprechend der früheren Definition der Identität von Individuen, D17—1, zusammen mit dem Lehrsatz der Stufenerhöhung, L16—1) und auch innerhalb eines umfassenderen Ausdrucks des Typensystems. Der folgende Lehrsatz L7 bezieht sich auf alle vier Fälle.

L24—7. $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{A}_i'$ und $\mathfrak{A}_j'$ seien Ausdrücke und $\mathfrak{a}_k$ und $\mathfrak{a}_k'$ Zeichen des Kalküls B, die die folgenden Bedingungen erfüllen. Entweder (a) $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_j$ sind Satzformeln und $\mathfrak{a}_k$ ist ,$\equiv$', oder (b) $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_j$ sind Ausdrücke desselben Typus und $\mathfrak{a}_k$ ist ,='. ($\mathfrak{A}_i\ \mathfrak{a}_k\ \mathfrak{A}_j$ ist also in jedem Fall eine Satzformel.) Dasselbe gilt für $\mathfrak{A}_i'$ und $\mathfrak{A}_j'$ und $\mathfrak{a}_k'$ (unabhängig davon, zu welcher Art $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_j$ gehören). $\mathfrak{A}_j'$ ist aus $\mathfrak{A}_i'$ dadurch gebildet, daß $\mathfrak{A}_i$ an einer Stelle durch $\mathfrak{A}_j$ ersetzt wird (gleichgültig, ob $\mathfrak{A}_i$ auch noch an andern Stellen vorkommt). Dann gilt Folgendes im Kalkül B.

a. $(\ )\,(\mathfrak{A}_i\ \mathfrak{a}_k\ \mathfrak{A}_j) \supset (\ )\,(\mathfrak{A}_i'\ \mathfrak{a}_k'\ \mathfrak{A}_j')$ ist beweisbar.
b. $(\ )\,(\mathfrak{A}_i'\ \mathfrak{a}_k'\ \mathfrak{A}_j')$ ist ableitbar aus $(\ )\,(\mathfrak{A}_i\ \mathfrak{a}_k\ \mathfrak{A}_j)$.
c. Wenn $(\ )\,(\mathfrak{A}_i\ \mathfrak{a}_k\ \mathfrak{A}_j)$ beweisbar ist, so auch $(\ )\,(\mathfrak{A}_i'\ \mathfrak{a}_k'\ \mathfrak{A}_j')$.

Beispiele. (Für die folgenden Beispiele setzen wir voraus, daß im Kalkül B Definitionen für ,3', ,mem_1', ,mem_2', ,Is_1' und ,str_1' analog D17—3, D18—1 und 2, D19—5 und D34—2 aufgestellt sind.)

1. Ersetzung einer Satzformel in einer Satzformel.

a. Auf Grund von ,$A \equiv B$' ist ,A' ersetzbar durch ,B', z. B. in ,$C \,.\, \sim A$', mit dem Ergebnis ,$C \,.\, \sim B$'. Hiermit ist gemeint: aus ,$A \equiv B$' ist ,$C \,.\, \sim A \equiv C \,.\, \sim B$' ableitbar. Daher ist aus ,$A \equiv B$' und ,$C \,.\, \sim A$' zusammen ,$C \,.\, \sim B$' ableitbar.

b. (Vergleiche Beispiel 1 zu L15—3.) Aus ,$(x)\,(Rxa \equiv Sbx)$' ist ,$\sim (x)\,(Px \vee Rxa) \equiv \sim (x)\,(Px \vee Sbx)$' ableitbar.

2. Ersetzung einer Satzformel in einem Ausdruck des Typensystems.

a. ,$(x)\,(Rxa \equiv Sbx)$' sei gegeben (wie in 1b). Dann ist ,$(\lambda\, x)\,(Px \vee Rxa) = (\lambda\, x)\,(Px \vee Sbx)$' ableitbar.

b. (Vergleiche Beispiel 2 zu L15—3.) ,$(x)\,(y)\,[(Px \supset Rxy) \equiv (\sim Rxy \supset \sim Px)]$' ist beweisbar. Daher ist nach L7c auch der Satz ,$(\lambda\, y)\,[(x)\,(Px \supset Rxy) \vee Qy] = (\lambda\, y)\,[(x)\,(\sim Rxy \supset \sim Px) \vee Qy]$' beweisbar.

3. Ersetzung eines Ausdrucks des Typensystems in einer Satzformel.

a. Aus ‚$a = b$' ist ‚$\sim (x)\, Rxa \equiv \sim (x)\, Rxb$' ableitbar.

b. Angenommen, ‚$(x)\,(Qx \equiv P_1 x \,.\, \sim P_2 x)$' ($\mathfrak{S}_1$) sei gegeben. ‚$(x)\,[(\lambda\, y)\,(P_1 y \,.\, \sim P_2 y)\, x \equiv P_1 x \,.\, \sim P_2 x]$' ist ein Grundsatz der Art G10. ‚$(x)\,[Qx \equiv (\lambda\, y)\,(P_1 y \,.\, \sim P_2 y)\, x]$' ist daher ableitbar aus $\mathfrak{S}_1$, und hieraus (mit Hilfe von G9a) ‚$Q = (\lambda\, y)\,(P_1 y \,.\, \sim P_2 y)$' ($\mathfrak{S}_2$). [$\mathfrak{S}_1$ oder die offene Formel ohne den Operator mag in Sprache A als Definition von ‚Q' aufgestellt werden, wenn ‚P_1' und ‚P_2' Grundzeichen sind. $\mathfrak{S}_2$ ist die entsprechende Definition in B.] Daher ist ‚Q' überall ersetzbar durch den λ-Ausdruck. Z. B. ist ‚$3\,(Q) \equiv 3\,(\lambda\, y)\,(P_1 y \,.\, \sim P_2 y)$' ableitbar aus $\mathfrak{S}_2$.

c. Angenommen, ‚$(x)\,[mem_2\,(R)\, x \equiv mem_1\,(S)\, x]$' ($\mathfrak{S}_1$) sei gegeben. Dann ist nach G9 ‚$mem_2\,(R) = mem_1\,(S)$' ableitbar. Daher ist auch ‚$Is_1\,(P, mem_2\,(R)) \equiv Is_1\,(P, mem_1\,(S))$' aus $\mathfrak{S}_1$ ableitbar.

4. Ersetzung eines Ausdrucks des Typensystems in einem umfassenderen Ausdruck des Typensystems.

a. Aus ‚$a = b$' ist ‚$(\lambda\, x)\,(Rxa) = (\lambda\, x)\,(Rxb)$' ableitbar.

b. Angenommen, ‚$mem_2\,(R) = mem_1\,(S)$' sei gegeben (s. Beispiel 3c). Dann ist ‚$str_1\,(mem_2\,(R)) = str_1\,(mem_1\,(S))$' ableitbar, d. h. „Die Kardinalzahl des Nachbereiches von R ist dieselbe wie die des Vorbereiches von S".

L7 zeigt auch die Möglichkeit der üblichen Anwendung von Definitionen entweder für die Ausschaltung oder die Einschaltung eines definierten Zeichens innerhalb eines beliebigen Zusammenhanges; denn eine Definition in der Sprache B hat ja die Form $\mathfrak{a}_i \equiv \mathfrak{S}_j$ oder $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{A}_j$, wo $\mathfrak{a}_i$ das definierte Zeichen ist (21e).

25. Das semantische System B

25a. Bewertungen und Auswertungen. Nun wollen wir die Regeln des semantischen Systems B aufstellen. Dadurch wird die beabsichtigte Deutung der Sprache B systematisiert.

Die Formregeln sind dieselben wie für den Kalkül B (21); wir wollen sie daher nicht wiederholen. Das semantische System B enthält somit dieselben Zeichen, Ausdrücke des Typensystems, Satzformeln, Sätze und Definitionen wie der Kalkül B.

Die Bedeutung der Individualkonstanten hängt von dem Sachgebiet ab, auf das das System angewendet werden soll. Die Individuen mögen etwa Raum-Zeit-Punkte sein, raum-zeitlich ausgedehnte Vorgänge, physische Körper, Personen (zu allen Zeiten), jetzt lebende Personen oder irgend etwas Anderes. Verschiedene Beispiele von Individuenbereichen werden später (Teil II) gegeben werden. In diesem Kapitel wollen wir die Wahl des Individuenbereiches offenlassen und in den semantischen Regeln einfach von „Individuen" sprechen, ohne festzulegen, was sie sind.

Unter den Grundzeichen des Systems B rechnen wir als deskriptiv die Satzkonstanten und die zum Typensystem gehörenden Konstanten (Individualkonstanten, Prädikate und Funktoren). Alle andern Grundzeichen sind logisch. Ein definiertes Zeichen ist deskriptiv, wenn in

seinem Definiens ein deskriptives Zeichen vorkommt, andernfalls logisch. [Streng genommen ist die Einteilung der Grundzeichen in deskriptive und logische abhängig von der Art des gewählten Individuenbereiches. Die oben angegebene Einteilung gilt z. B., wenn als Individuen sämtliche Raum-Zeit-Punkte oder sämtliche Raum-Zeit-Gebiete oder sämtliche Vorgänge der physikalischen Welt genommen werden. In andern Fällen muß die Einteilung unter Umständen modifiziert werden. Wenn als Individuen Zahlen genommen werden, und die undefinierten Prädikate und Funktoren als arithmetische Begriffe gedeutet werden, so sind alle Grundzeichen logisch. Über die Probleme der Einteilung, die heute noch nicht gänzlich geklärt sind, vgl. [Semantics] § 13, [Meaning] § 21.]

Bewertungen. Die im Folgenden angegebenen Regeln stimmen mit den früher (**11**) für die Sprache A angegebenen überein, sind aber erweitert für das System B. Die Sprache B ist, wie A, extensional. Daher ist es auch hier hinreichend, als Werte, die in den Bewertungen zugeschrieben werden, Extensionen von geeigneten Typen zu nehmen. Das geschieht in den folgenden **Bewertungsregeln.**

1. Mögliche Werte für Satzformeln sind die beiden Wahrheitswerte: Wahrheit (W) und Falschheit (F).

2. Mögliche Werte für einen Ausdruck des Typensystems, der den Typus t_i hat, sind die Werte vom Typus t_i, die durch folgende Regeln bestimmt sind.

a. Ein Wert vom Typus 0 (also ein möglicher Wert für einen Individualausdruck) ist ein Individuum des jeweils gewählten Individuenbereiches.

b. Ein Wert vom Typus $t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_n}$ ($n \geqq 2$) (also für einen n-stelligen Argumentausdruck) ist ein geordnetes n-tupel von Werten, wobei der p-te Wert ($p = 1$ bis n) ein Wert vom Typus t_{i_p} ist.

c. Ein Wert vom Typus (t_i) (also für einen Prädikatausdruck) ist eine Klasse von Werten des Typus t_i.

d. Ein Wert vom Typus $(t_i : t_j)$ (also für einen Funktorausdruck) ist eine Extension (Wertverlauf) einer Funktion, durch die jedem möglichen Wert des Typus t_i (als Argument) genau ein Wert vom Typus t_j (als Funktionswert) zugeordnet wird.

Die bewertbaren Zeichen in einem Ausdruck $\mathfrak{A}_i$ von B sind die in $\mathfrak{A}_i$ vorkommenden freien Variablen und deskriptiven Konstanten. Eine Bewertung von $\mathfrak{A}_i$ ordnet jedem bewertbaren Zeichen in $\mathfrak{A}_i$ einen beliebigen möglichen Wert des betreffenden Typus zu. Wenn eine bestimmte Bewertung $\mathfrak{B}_i$ für die bewertbaren Zeichen von $\mathfrak{A}_i$ gewählt ist, so wird nach den folgenden **Auswertungsregeln** der Wert für Teilausdrücke — entweder Ausdrücke des Typensystems oder Satzformeln — bestimmt, wobei man mit den kleinsten Teilausdrücken anfängt und schrittweise zu umfassenderen fortschreitet, bis schließlich zu dem Wert des gegebenen Ausdruckes $\mathfrak{A}_i$ selbst.

1. Für Ausdrücke des Typensystems.

a. Ein zusammengesetzter Argumentausdruck $\mathfrak{A}_{i_1}, \mathfrak{A}_{i_2}, .., \mathfrak{A}_{i_n}$ ($n \geqq 2$) hat als Wert das geordnete n-tupel der Werte von $\mathfrak{A}_{i_1}$, von $\mathfrak{A}_{i_2}$, .., von $\mathfrak{A}_{i_n}$.

b. Ein Prädikatausdruck der Form $(\lambda\, \mathfrak{v}_i)\,(\mathfrak{S}_j)$ hat als Wert die Klasse der Werte von $\mathfrak{v}_i$, die $\mathfrak{S}_j$ erfüllen (d. h. die, zusammen mit den durch $\mathfrak{B}_i$ bestimmten Werten, der Formel $\mathfrak{S}_j$ den Wert W geben).

c. Ein Prädikatausdruck der Form $(\lambda\, \mathfrak{v}_{i_1}, \mathfrak{v}_{i_2}, .., \mathfrak{v}_{i_n})\,(\mathfrak{S}_j)$ ($n \geqq 2$) hat als Wert die Klasse derjenigen n-tupel von Werten für $\mathfrak{v}_{i_1}, \mathfrak{v}_{i_2}, .., \mathfrak{v}_{i_n}$, die $\mathfrak{S}_j$ erfüllen.

d. Ein Funktorausdruck der Form $(\lambda\, \mathfrak{v}_i)\,(\mathfrak{A}_j)$ hat als Wert diejenige Funktionsextension, die jedem möglichen Wert von $\mathfrak{v}_i$ denjenigen Wert zuordnet, der sich für $\mathfrak{A}_j$ ergibt, wenn der Variablen $\mathfrak{v}_i$ jener Wert zugeschrieben wird.

e. Ein Funktorausdruck der Form $(\lambda\, \mathfrak{v}_{i_1}, \mathfrak{v}_{i_2}, .., \mathfrak{v}_{i_n})\,(\mathfrak{A}_j)$ ($n \geqq 2$) hat als Wert diejenige Funktionsextension, die einem n-tupel von möglichen Werten für die Variablen $\mathfrak{v}_{i_1}, \mathfrak{v}_{i_2}, .., \mathfrak{v}_{i_n}$ denjenigen Wert zuordnet, der sich für $\mathfrak{A}_j$ ergibt, wenn jene Werte den genannten Variablen zugeschrieben werden.

f. Ein Vollausdruck $\mathfrak{A}_i\,(\mathfrak{A}_j)$ des Funktorausdruckes $\mathfrak{A}_i$ hat denjenigen Wert, den die Funktionsextension, die der Wert von $\mathfrak{A}_i$ ist, dem Wert von $\mathfrak{A}_j$ zuordnet.

2. Für Satzformeln.

a. Eine Satzformel der Form $\mathfrak{A}_i\,(\mathfrak{A}_j)$, bestehend aus dem Prädikatausdruck $\mathfrak{A}_i$ (von beliebigem Typus) und dem (einfachen oder zusammengesetzten) Argumentausdruck $\mathfrak{A}_j$, hat den Wert W, falls der Wert von $\mathfrak{A}_j$ zu der Klasse gehört, die der Wert von $\mathfrak{A}_i$ ist; und andernfalls den Wert F.

b. Eine Satzformel der Form $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_j$ hat den Wert W, falls $\mathfrak{A}_i$ denselben Wert hat wie $\mathfrak{A}_j$; und andernfalls den Wert F.

c. $\sim \mathfrak{S}_i$ hat den Wert W, falls $\mathfrak{S}_i$ den Wert F hat, und sonst F.

d. $\mathfrak{S}_i \vee \mathfrak{S}_j$ hat den Wert W, falls $\mathfrak{S}_i$ oder $\mathfrak{S}_j$ oder beide den Wert W haben, und sonst F.

e. $\mathfrak{S}_i \,.\, \mathfrak{S}_j$ hat den Wert W, falls $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ beide den Wert W haben, und sonst F.

f. $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j$ hat den Wert F, falls $\mathfrak{S}_i$ W und $\mathfrak{S}_j$ F hat, und sonst W.

g. $\mathfrak{S}_i \equiv \mathfrak{S}_j$ hat den Wert W, falls $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{S}_j$ denselben Wert haben, und sonst F.

h. $(\mathfrak{v}_i)\,(\mathfrak{S}_j)$ hat den Wert W, falls $\mathfrak{S}_j$ für alle möglichen Bewertungen der in $\mathfrak{S}_j$ freien Variablen $\mathfrak{v}_i$ (zusammen mit den durch $\mathfrak{B}_i$ gegebenen Bewertungen der übrigen bewertbaren Zeichen) den Wert W hat, und sonst F.

Wenn die Satzformel $\mathfrak{S}_j$ auf Grund der Bewertung $\mathfrak{B}_i$ den Wert W hat, so sagen wir (wie früher), daß $\mathfrak{B}_i$ oder die durch $\mathfrak{B}_i$ zugeschriebenen Werte die Formel $\mathfrak{S}_j$ erfüllen. Der Begriff des Spielraums und die L-Begriffe und F-Begriffe werden dann für das System B in derselben Form definiert wie früher (**5b** und **6a**); wir wollen die Definitionen nicht wiederholen.

25b. Bezeichnungsregeln. Während die L-Begriffe zu den wichtigsten Begriffen der Logik gehören und daher in den Lehrsätzen dieses Buches häufig vorkommen, ist der Begriff der Wahrheit weniger wichtig für die Logik, wo er meist nur in bedingungsweisen Zusammenhängen vorkommt, etwa „wenn $\mathfrak{S}_i$ wahr ist, so ist $\mathfrak{S}_j$ wahr". Er ist aber wichtig für die Erkenntnistheorie und die Methodologie der Wissenschaft. Als Grundlage für die spätere Definition der Wahrheit stellen wir Regeln für Variable und deskriptive Konstanten auf. Zunächst legen wir die Wertbereiche der Variablen aller Typen durch die folgenden beiden Regeln fest. Wir nehmen als Beispiel an, daß wir als Individuenbereich für eine gewisse Anwendung des Systems B den Bereich der physischen Dinge gewählt haben.

1. Die Werte der Individualvariablen sind die physischen Dinge.
2. Die Werte der Prädikatvariablen und der Funktorvariablen eines beliebigen Typus sind alle möglichen Werte des betreffenden Typus für den in (1) genannten Individuenbereich, gemäß den früher angegebenen Bewertungsregeln 2c und d.

[Die obige Formulierung gibt nicht die Wertintensionen, sondern nur die Wertextensionen (**10b**); diese genügen als Grundlage für die Definition der Wahrheit.]

Nun stellen wir die Bezeichnungsregeln für die deskriptiven Grundzeichen des Systems auf. Angenommen, für eine bestimmte Anwendung enthalte das System B nur die folgenden deskriptiven Grundzeichen: drei Individualkonstanten ‚*a*', ‚*b*', ‚*c*'; zwei einstellige Prädikate erster Stufe ‚*P*' und ‚*Q*'; und ein zweistelliges Prädikat erster Stufe ‚*R*'. Wir wählen nun als Beispiel die Bezeichnungsregeln, die den genannten Zeichen die in der zweiten Kolumne der folgenden Tabelle angegebenen

Grundzeichen	Designat (Intension)	Extension
‚*a*'	(der Individualbegriff) Mond	(das Ding) Mond
‚*b*'	(der Individualbegriff) Sonne	(das Ding) Sonne
‚*c*'	(der Individualbegriff) Afrika	(das Ding) Afrika
‚*P*'	die Eigenschaft, kugelförmig zu sein	die Klasse der kugelförmigen Dinge
‚*Q*'	die Eigenschaft, blau zu sein	die Klasse der blauen Dinge
‚*R*'	die Größer-Relation	die Klasse der Paare x, y derart, daß x größer als y ist

Designate zuschreiben. Diese Designate sind Intensionen (Begriffe), nicht Extensionen (Begriffsumfänge) (vgl. **10b**). Dadurch sind dann die entsprechenden Extensionen bestimmt, wie in der dritten Kolumne angegeben.

Diese Wahl der Designate ist in Übereinstimmung mit den früher gewählten Wertbereichen der Variablen. Aus den angegebenen Designaten der Grundzeichen ergeben sich in leicht ersichtlicher Weise die Designate der geschlossenen Ausdrücke, nämlich einerseits gewisse Begriffe (Eigenschaften, Relationen usw.) als Designate von Ausdrücken des Typensystems, und anderseits gewisse Propositionen als Designate von Sätzen. (Die Regeln für die Bestimmung dieser abgeleiteten Designate wollen wir hier nicht angeben, da sie für die Definition der Wahrheit nicht nötig sind.) Ferner ergibt sich für jede definierte Konstante ihr Designat, nämlich als Designat ihres Definiens.

25c. Wahrheit. Die möglichen Werte für alle Arten von Variablen im System B sind durch die Regeln (1) und (2) angegeben. Nun definieren wir eine besondere Bewertung $\mathfrak{B}_1$ für alle deskriptiven Grundzeichen des Systems B: $\mathfrak{B}_1$ schreibt jedem dieser Zeichen die durch die Bezeichnungsregeln bestimmte Extension als Wert zu, wie oben angegeben. Dann definieren wir wie folgt: die Extension eines geschlossenen Ausdrucks $\mathfrak{A}_i$ des Systems B ist der Wert, den $\mathfrak{A}_i$ auf Grund der Bewertung $\mathfrak{B}_1$ (gemäß den früher angegebenen Auswertungsregeln) hat.

Beispiel. Der Wert von ‚$(\lambda x)(Px \, . \, Qx)$‘ auf Grund von $\mathfrak{B}_1$ gemäß den Auswertungsregeln 2a, 2e und 1b ist die Klasse derjenigen Dinge, die kugelförmig und blau sind. Diese Klasse ist somit die Extension des genannten Ausdrucks.

Nun können wir den Begriff der Wahrheit definieren: Ein Satz $\mathfrak{S}_i$ ist wahr im System B, wenn seine Extension der Wert W ist. Mit andern Worten, ein Satz ist wahr, wenn seine Auswertung gemäß den Auswertungsregeln auf Grund der Bewertung $\mathfrak{B}_1$, die durch die Bezeichnungsregeln bestimmt ist, zu dem Wert W führt. [Die Definition von ‚wahr‘ mit Hilfe von ‚W‘ enthält nicht etwa einen circulus vitiosus. ‚W‘ und ‚F‘ sind hier einfach als technische Terme zu nehmen, deren Verwendung durch die Auswertungsregeln festgelegt wird; man könnte ebensogut statt dessen die Terme ‚1‘ und ‚0‘ nehmen oder irgendwelche andern neutralen Terme.]

Der folgende Lehrsatz gibt die Wahrheitsbedingungen für Sätze einfachster Form in allgemeiner Weise, d. h. ohne Bezugnahme auf bestimmte Bezeichnungsregeln. Er ergibt sich unmittelbar aus der obigen Definition der Bewertung $\mathfrak{B}_1$ und den Auswertungsregeln 2a und b.

L25—1. a. Ein einstelliger Atomsatz $\mathfrak{a}_i(\mathfrak{a}_j)$ ist dann und nur dann wahr, wenn das Individuum, das die Extension von $\mathfrak{a}_j$ ist, zu der Klasse gehört, die die Extension von $\mathfrak{a}_i$ ist, mit andern Worten, wenn dieses Individuum die durch $\mathfrak{a}_i$ bezeichnete Eigenschaft hat.

b. Ein n-stelliger Atomsatz $\mathfrak{a}_i(\mathfrak{a}_{j_1}, .., \mathfrak{a}_{j_n})$ $(n \geqq 2)$ ist dann und nur dann wahr, wenn das n-tupel der Individuen, die die Extensionen von $\mathfrak{a}_{j_1}, .., \mathfrak{a}_{j_n}$ sind, zu der Klasse gehört, die die Extension von $\mathfrak{a}_i$ ist; mit andern Worten, wenn die durch $\mathfrak{a}_i$ bezeichnete Relation für jene Individuen gilt.

c. Ein Identitätssatz $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_j$ mit den Individualkonstanten $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_j$ ist dann und nur dann wahr, wenn diese beiden Konstanten dasselbe Individuum als Extension haben.

Angenommen, ein Satz $\mathfrak{S}_i$ des Systems B sei gegeben und man wolle mit Hilfe der aufgestellten Definition der Wahrheit feststellen, ob er wahr oder falsch ist. Dazu muß man offenbar auf die angegebene Bewertung $\mathfrak{B}_1$, also im wesentlichen auf die Bezeichnungsregeln zurückgreifen, und ferner auf die früher angegebenen Auswertungsregeln. Man sieht aber leicht, daß dies nicht genügt, wenn $\mathfrak{S}_i$ faktisch (d. h. weder L-wahr noch L-falsch) ist; in diesem Fall muß man, um den Wahrheitswert von $\mathfrak{S}_i$ festzustellen, auch noch faktische Kenntnisse über die Beschaffenheit der Individuen des betreffenden Bereiches zu Hilfe nehmen. $\mathfrak{S}_1$ sei z. B. der Atomsatz ‚*Pa*'. Dann findet man gemäß L1a, daß $\mathfrak{S}_1$ dann und nur dann wahr ist, wenn der Mond kugelförmig ist. Mehr kann man aus den semantischen Regeln nicht herausholen. Diese Regeln liefern also hier — und ebenso für jeden andern faktischen Satz des betreffenden semantischen Systems — nur eine Wahrheitsbedingung, d. h. eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß der Satz wahr ist. Die Feststellung, ob der betreffende faktische Satz wahr ist oder nicht, d. h. ob die durch die semantischen Regeln gegebene Wahrheitsbedingung tatsächlich erfüllt ist oder nicht, liegt außerhalb der Semantik; sie gehört zum Bereich der empirischen Wissenschaft (in dem angegebenen Beispiel zur Astronomie).

26. Beziehungen zwischen syntaktischen und semantischen Systemen

Wir haben zwei Sprachsysteme konstruiert, die die Sprache B darstellen, zunächst ein syntaktisches System (Kalkül), dann ein semantisches. Beide enthalten dieselben Sätze. Das semantische System B gibt eine Deutung (Interpretation) der Sätze, da es Regeln enthält, die es möglich machen, für jeden Satz $\mathfrak{S}_i$ eine Wahrheitsbedingung p_i zu finden, derart, daß $\mathfrak{S}_i$ dann und nur dann wahr ist, wenn p_i. Wenn diese gefunden ist, so „verstehen" wir den Satz $\mathfrak{S}_i$; wir wissen, was er über die Individuen des betreffenden Bereiches „besagt". $\mathfrak{S}_i$ besagt nämlich, daß p_i; mit andern Worten, $\mathfrak{S}_i$ besagt, daß die Beschaffenheit der Individuen derart ist, daß die Wahrheitsbedingung erfüllt ist. In Termen einer andern, früher angedeuteten Methode, das Designat des Satzes $\mathfrak{S}_i$ ist die Proposition p_i. Wir fanden früher, daß in dem angegebenen Beispielsystem der Satz ‚*Pa*' dann und nur dann wahr ist,

wenn der Mond kugelförmig ist; in andern Termen, der genannte Satz bezeichnet die Proposition, daß der Mond kugelförmig ist.

Gewöhnlich hat ein Autor, der ein syntaktisches System konstruiert, schon eine Deutung dafür im Sinn. Die Deutung braucht nicht schon in einem semantischen System dargestellt zu sein; meist wird sie in nicht-systematischer Weise gewählt. Die beabsichtigte Deutung kann in den syntaktischen Regeln natürlich nicht explizit angegeben werden, da diese Regeln streng formal sein müssen. Aber die Absicht des Autors in bezug auf die Deutung beeinflußt natürlich seine Wahl der Formregeln und Umformungsregeln für das syntaktische System. Die Zeichen werden so gewählt, daß gewisse Begriffe, etwa die einer vor-systematisch gegebenen Theorie, ausgedrückt werden können. Die Satzformen werden so gewählt, daß jeder Satz bei der beabsichtigten Deutung ein sinnvoller Aussagesatz ist. Die Wahl der Grundsätze ist beschränkt durch die Forderung, daß sie bei der beabsichtigten Deutung wahr sein müssen. Und die Schlußregeln müssen die Bedingung erfüllen, daß, wenn $\mathfrak{S}_j$ aus $\mathfrak{S}_i$ nach einer Schlußregel unmittelbar ableitbar ist, $\mathfrak{S}_i \supset \mathfrak{S}_j$ (mit der üblichen Deutung von ‚$\supset$') ein wahrer Satz wird. Daraus folgt dann, daß auch alle beweisbaren Sätze wahr sind. Wenn der Zweck des syntaktischen Systems ist, einen Teil der Logik — nicht einen Teil der empirischen Wissenschaft — formal darzustellen, so werden die Umformungsregeln so gewählt, daß jeder Grundsatz logisch wahr ist und daß, wenn $\mathfrak{S}_j$ aus $\mathfrak{S}_i$ unmittelbar ableitbar ist, $\mathfrak{S}_i$ $\mathfrak{S}_j$ logisch impliziert. In diesem Fall nennt man den Kalkül häufig einen „logischen Kalkül" oder „Logikkalkül". In diesem Sinn ist der Kalkül B ein logischer Kalkül. Die beabsichtigte Deutung der Sprache B haben wir systematisch dargestellt in dem semantischen System B. Der Kalkül B ist so konstruiert, daß er nur gewisse logische Beziehungen, die zwischen den Sätzen des semantischen Systems B bestehen, in formaler Weise widerspiegelt, aber keine in B ausdrückbare faktische Erkenntnis. Es kann in der Tat gezeigt werden, daß jeder Grundsatz des Kalküls B in dem semantischen System B L-wahr ist (für den Grundsatz der Anzahl der Individuen, G12, ist dies allerdings umstritten, vgl. **37** e), und daß, wenn $\mathfrak{S}_j$ aus $\mathfrak{S}_i$ nach einer Schlußregel des Kalküls B unmittelbar ableitbar ist, $\mathfrak{S}_i$ $\mathfrak{S}_j$ im semantischen System B L-impliziert. Daraus folgt, daß auch jeder beweisbare Satz L-wahr ist, und daß, wenn $\mathfrak{S}_j$ aus $\mathfrak{S}_i$ ableitbar ist, $\mathfrak{S}_i$ $\mathfrak{S}_j$ L-impliziert.

Das Umgekehrte gilt jedoch nicht: nicht alle L-wahren Sätze des semantischen Systems B sind beweisbar im Kalkül B. Es ist sogar unmöglich, einen Kalkül der üblichen Art (d. h. mit endlich vielen Grundsätzen oder Grundsatzschemata und mit endlich vielen Schlußregeln, von denen jede sich nur auf endlich viele Prämissen bezieht) zu konstruieren, in dem alle L-wahren Sätze des semantischen Systems B und nur diese beweisbar sein würden; es gilt allgemein, daß kein Kalkül der üblichen Art die Arithmetik der natürlichen Zahlen (mit Variablen für natürliche Zahlen und mit rekursiven Definitionen für arithmetische Funktionen) erschöpfen kann. Die genannte Umkehrung gilt jedoch in einem beschränkten Bereich: jeder (nur aus Grundzeichen bestehende)

L-wahre Satz des semantischen Systems B, der entweder keine Variablen oder nur Individualvariable enthält, ist im Kalkül B beweisbar.

Für ausführlichere Darstellungen über die Beziehungen zwischen syntaktischen und semantischen Systemen s. [Semantics] und [Formalization]. Die im letzten Absatz angegebenen Ergebnisse sind von KURT GÖDEL gefunden worden; s. HILBERT und BERNAYS [Grundlagen] Band II.

C. Die erweiterte Sprache C

27. Die Sprache C

Die früher dargestellte Sprache A enthält hinreichende Ausdrucksformen, um die meisten Axiomensysteme und wissenschaftlichen Theorien zu formulieren. Um eine solche Formulierung durchzuführen, braucht man nur für einige der vorkommenden Begriffe beliebige Konstanten geeigneter Typen als Grundzeichen zu nehmen, derart, daß Konstanten für die übrigen Begriffe durch Definitionen eingeführt werden können. Später, in Teil II, werden Beispiele für die Formulierung von Axiomensystemen in Sprache A gegeben.

In diesem Kapitel wollen wir eine erweiterte Sprache C entwickeln. Sie enthält alle Ausdrucksmittel der Sprache A mit Ausnahme der Satzvariablen. [Diese wurden in A verwendet, weil sie für die Aufstellung tautologischer Satzformeln bequem sind; sie sind aber kaum jemals von Nutzen für die Formulierung wissenschaftlicher Theorien.] Daher sind alle Sätze von A auch Sätze von C. In der Sprache C verwenden wir eine Menge weiterer Ausdrucksformen, die die Formulierung von Axiomen und wissenschaftlichen Sätzen oft erheblich kürzer und übersichtlicher machen. In Teil II werden wir sämtliche Beispielsätze (Axiome und dergleichen) in Sprache C formulieren. Die meisten werden auch in Sprache A formuliert, so daß man Kürze und Einfachheit der beiden Formulierungen unmittelbar vergleichen kann. Manche Sätze werden wir nur in C formulieren, weil die Formulierung in A zu umständlich werden würde.

Im vorangehenden Kapitel haben wir die Sprache B behandelt. Sie enthält alle Ausdrucksmittel der Sprache A mit Ausnahme der Satzvariablen und der in **17c**, **18a** und **19** definierten Konstanten. Da diese Konstanten mit Hilfe der gegebenen Definitionen stets eliminiert werden können, so ist jeder Satz von A übersetzbar in einen Satz von B. [Die Satzvariablen kommen in A nicht in Sätzen vor, sondern nur in offenen Satzformeln.] Für alle in Sprache C neu hinzukommenden Konstanten mit Ausnahme von ‚λ' werden Definitionen oder andere Regeln ähnlicher Art angegeben, mit deren Hilfe diese Konstanten in jedem Satz, in dem sie vorkommen, eliminiert werden können. Da Sprache B den λ-Operator enthält, so sind auch alle Sätze von C übersetzbar in B.

Für die Sprache B haben wir im vorigen Kapitel Formregeln aufgestellt, durch die die zugelassenen Formen für Ausdrücke des Typensystems, Satzformeln und Sätze angegeben werden. Für Sprache C werden wir keine Formregeln explizit aufstellen. Es wird vorausgesetzt,

daß alle in B zugelassenen Ausdrucksformen auch für C gelten, und außerdem Formen, die sich aus der Einführung der neuen Zeichen ergeben. Für B haben wir ferner syntaktische Umformungsregeln aufgestellt, durch die die Begriffe der Beweisbarkeit und Ableitbarkeit in B definiert sind. In diesem Kapitel werden wir zuweilen sagen, daß ein gewisser Satz der Sprache C beweisbar oder aus gewissen andern Sätzen ableitbar sei. Damit ist gemeint, daß für die Übersetzungen dieser Sätze in B Beweisbarkeit bzw. Ableitbarkeit gilt. Ferner haben wir für B semantische Regeln aufgestellt und auf Grund davon L-Begriffe, F-Begriffe, Wahrheit und andere semantische Begriffe definiert. Wenn wir in diesem Kapitel solche semantische Begriffe auf Satzformeln in C anwenden, so ist damit wiederum gemeint, daß die betreffenden Begriffe für die Übersetzungen der Formeln in B gelten. Wie früher für Sprache A, so werden wir auch hier für Sprache C häufig Lehrsätze aufstellen, die gewissen Satzformeln L-Wahrheit zuschreiben. Hier wie früher gilt natürlich, daß, wenn eine offene Satzformel $\mathfrak{S}_i$ L-wahr ist, auch jede Formel L-wahr ist, die aus $\mathfrak{S}_i$ durch Voranstellung beliebiger Alloperatoren entsteht, und insbesondere auch der Satz, der durch Voranstellung von Alloperatoren für alle in $\mathfrak{S}_i$ frei vorkommenden Variablen entsteht; ferner sind auch alle Formeln L-wahr, die aus $\mathfrak{S}_i$ durch beliebige Einsetzungen für frei vorkommende Variablen entstehen, und insbesondere auch alle Sätze, die aus $\mathfrak{S}_i$ gebildet werden, indem für jede frei vorkommende Variable ein geschlossener Ausdruck eingesetzt wird. Für alle Sätze von C, die in diesem Kapitel als L-wahr angegeben werden, sind die Übersetzungen nicht nur L-wahr im semantischen System B, sondern auch beweisbar im Kalkül B.

Wie in Sprache A, lassen wir auch in Sprache C bei der Schreibung von Beispielsätzen oft Klammern fort, die in einer vollständigen Formulierung gemäß den Regeln gefordert sind. Wir wenden zunächst die in **3c** und **9a** angegebenen Konventionen für die Weglassung von Klammern an; weitere Konventionen werden später angegeben.

28. Prädikatverknüpfungen

28a. Prädikatverknüpfungen. Wir wollen jetzt zusammengesetzte Prädikatausdrücke einführen; sie sind mit Hilfe der Verknüpfungszeichen gebildet, die wir bisher nur für Satzformeln angewendet haben. ‚$(P \vee Q)\,a$‘ soll als Abkürzung für den Satz ‚$Pa \vee Qa$‘ dienen. ‚$P \vee Q$‘ ist ein Prädikatausdruck von demselben Typus wie das Prädikat ‚P‘, nämlich ein einstelliger Prädikatausdruck erster Stufe vom Typus (0). In analoger Weise verwenden wir ‚$(P \,.\, Q)\,a$‘ als abgekürzte Schreibung für ‚$Pa \,.\, Qa$‘, ‚$(P \supset Q)\,a$‘ für ‚$Pa \supset Qa$‘ und ‚$(P \equiv Q)\,a$‘ für ‚$Pa \equiv Qa$‘. Derartige Abkürzungen sind hiernach nur verwendbar, wenn in der ursprünglichen Schreibung die beiden Prädikate dieselben Argumentausdrücke bei sich haben. Ferner wollen wir für ‚$\sim (Pa)$‘ — wofür wir gewöhnlich ‚$\sim Pa$‘ schreiben — auch die Schreibung ‚$(\sim P)\,a$‘ zulassen, wo ‚$\sim P$‘ ein Prädikatausdruck ist. Die angegebene Methode der Abkürzung kann

zuweilen auch mehrmals bei demselben Satz angewendet werden; sie führt dann zu noch weiter zusammengesetzten Prädikatausdrücken. Z. B. können wir ‚$P_1 a \vee P_2 a \supset \sim P_3 a$' zunächst umformen in ‚$(P_1 \vee P_2) a \supset (\sim P_3) a$' und dann in ‚$((P_1 \vee P_2) \supset (\sim P_3)) a$'. Hierfür schreiben wir in analoger Anwendung der früheren Regeln über die Fortlassung von Klammern (3c): ‚$(P_1 \vee P_2 \supset \sim P_3) a$'. Die Methode der zusammengesetzten Prädikatausdrücke soll auch für Prädikate irgendwelcher anderer Typen angewendet werden; z. B. ist ‚$(R_1 \supset R_2)(a, b)$' Abkürzung für ‚$R_1(a, b) \supset R_2(a, b)$' und ‚$(M_1 \vee M_2) P$' Abkürzung für ‚$M_1(P) \vee M_2(P)$'. Die beschriebene Verwendung der Verknüpfungszeichen für Prädikatausdrücke kann durch folgende Definitionen für den einfachsten Typus eingeführt werden; analoge Definitionen sollen für jeden andern Typus von Prädikatvariablen gelten.

D28—1. **a.** $(\sim F)\, x \equiv \sim (Fx)$.
b. $(F \vee G)\, x \equiv Fx \vee Gx$.
c. $(F \,.\, G)\, x \equiv Fx \,.\, Gx$.
d. $(F \supset G)\, x \equiv (Fx \supset Gx)$.
e. $(F \equiv G)\, x \equiv (Fx \equiv Gx)$.

Die zusammengesetzten Prädikatausdrücke können auch als Argumentausdrücke für Prädikate höherer Stufen verwendet werden. In Sprache A konnten wir die Kardinalzahlprädikate ‚0', ‚1' usw. nur auf Prädikate, nicht auf zusammengesetzte Prädikatausdrücke anwenden. Um z. B. den Satz „Es gibt 5 (Individuen), die P_1 und P_2 sind" zu übersetzen, mußten wir zunächst ein Prädikat ‚Q' definieren: ‚$Qx \equiv P_1 x \,.\, P_2 x$'. Dann konnten wir formulieren: ‚$5(Q)$'. Jetzt, in Sprache C, brauchen wir kein neues Prädikat, sondern verwenden den Prädikatausdruck ‚$P_1 \,.\, P_2$' und formulieren: ‚$5(P_1 \,.\, P_2)$'.

28b. Universalität. Wir wollen eine Eigenschaft von Individuen universell nennen, wenn sie jedem Individuum zukommt; oder in Klassenterminologie: eine Klasse von Individuen heißt universell, wenn jedes Individuum ein Element von ihr ist. Allgemein: eine Klasse irgend eines Typus heißt universell, wenn jede Entität des entsprechenden Elemententypus ein Element von ihr ist. Als Symbol für Universalität wollen wir ‚U' verwenden. ‚$U(P)$' besagt daher, daß die Klasse (oder Eigenschaft) P universell ist, ist also gleichbedeutend mit ‚$(x)\, Px$'. Wir definieren somit:

D28—2. $U(F) \equiv (x)\, Fx$.

Analoge Definitionen sollen für Prädikate beliebiger anderer Typen gelten, auch für mehrstellige Prädikate. Z. B. soll ‚$(x)(y)\, Rxy$' durch ‚$U(R)$' abgekürzt werden. Allgemein, für einen n-stelligen Prädikatausdruck $\mathfrak{A}_j$ ($n \geqq 1$) von beliebigem Typus und beliebiger Zusammensetzung soll $U(\mathfrak{A}_j)$ Abkürzung für $(\mathfrak{v}_{i_1})(\mathfrak{v}_{i_2}) \ldots (\mathfrak{v}_{i_n}) [\mathfrak{A}_j(\mathfrak{v}_{i_1}, \mathfrak{v}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{v}_{i_n})]$ sein. Die abgekürzte Formulierung mit ‚U' werden wir besonders bei zusammengesetzten Prädikatausdrücken häufig verwenden. Z. B. wird

der Satz ,$(x)\,(Px\,.\sim Qx)$' zunächst umgeformt in ,$(x)\,(P\,.\sim Q)\,x$' und dann in ,$U\,(P\,.\sim Q)$'.

Wenn ,$(x)\,(Px \supset Qx)$' oder kürzer ,$U(P \supset Q)$' gilt, so wollen wir sagen, P sei enthalten in Q; in Klassenterminologie: P sei eine Teilklasse von Q. Hierfür wollen wir die kürzere Symbolisierung ,$P \subset Q$' verwenden. Analog sagen wir, wenn ,$(x)\,(y)\,(Rxy \supset Sxy)$' oder kürzer ,$U(R \supset S)$' gilt, R sei enthalten in S oder eine Teilrelation von S. Hierfür schreiben wir kurz ,$R \subset S$'. Wir definieren:

D28—3. $(F \subset G) \equiv U(F \supset G)$.

Analoge Definitionen sollen für Prädikatausdrücke beliebiger anderer Typen gelten. Allgemein soll $\mathfrak{A}_i \subset \mathfrak{A}_j$, wo $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_j$ n-stellige Prädikatausdrücke desselben Typus sind, Abkürzung für $U\,(\mathfrak{A}_i \supset \mathfrak{A}_j)$ und daher für $(\mathfrak{v}_{k_1})\,..\,(\mathfrak{v}_{k_n})\,[\mathfrak{A}_i\,(\mathfrak{v}_{k_1}, .., \mathfrak{v}_{k_n}) \supset \mathfrak{A}_j\,(\mathfrak{v}_{k_1}, .., \mathfrak{v}_{k_n})]$ sein.

$U(\mathfrak{A}_i)$ sei eine Satzformel mit einem beliebigen (geschlossenen oder offenen) Prädikatausdruck $\mathfrak{A}_i$. Steht $U(\mathfrak{A}_i)$ allein, d. h. nicht als Teilformel innerhalb einer andern Formel, so soll es zugelassen werden, ,U' wegzulassen und einfach $\mathfrak{A}_i$ zu schreiben. So schreiben wir z. B. anstatt des Satzes ,$U(P \vee Q)$' einfach ,$P \vee Q$', und anstatt der Satzformel ,$U(F\,.\sim G)$' ,$F\,.\sim G$'. Findet man etwa in der Liste L-wahrer Satzformeln in einem Lehrsatz einen Prädikatausdruck $\mathfrak{A}_i$, so ist damit gemeint, daß $U(\mathfrak{A}_i)$ eine L-wahre Satzformel ist. In Teilformeln darf ,U' nicht fortgelassen werden, damit der Unterschied zwischen den folgenden beiden Fällen nicht verwischt wird: (1) ,$\sim U\,(P)$' ist Abkürzung für ,$\sim (x)\,(Px)$', d. h. „Nicht jedes Individuum ist P"; (2) ,$U\,(\sim P)$' ist Abkürzung für ,$(x)\,(\sim Px)$', d. h. „Kein Individuum ist P". Nur für (2), nicht für (1), ist die kürzere Schreibweise ,$\sim P$' erlaubt. Da ,U' auf Prädikatausdrücke beliebiger Typen anwendbar ist, so auch die abgekürzte Schreibweise ohne ,U'. ,M' sei z. B. ein einstelliges Prädikat zweiter Stufe. Dann kann ,$(F)\,M(F)$' umgeformt werden in ,$U(M)$' und, wenn es allein steht, weiter in ,M'.

Eine Klasse (oder Eigenschaft) heißt leer, wenn keine Entität (des entsprechenden Elemententypus) zu ihr gehört; andernfalls nicht-leer. Nicht-Leerheit wollen wir durch das Symbol ,$\exists$' ausdrücken. ,$\exists\,(P)$' soll also besagen, daß die Klasse P nicht leer ist; es ist daher gleichbedeutend mit ,$(\exists\,x)\,Px$'. Ebenso ist ,$\exists\,(R)$' gleichbedeutend mit ,$(\exists\,x)\,(\exists\,y)\,Rxy$'. Wir definieren:

D28—4. $\exists\,(F) \equiv (\exists\,x)\,Fx$; und analog für beliebige andere Typen.

Allgemein, für einen beliebigen Prädikatausdruck $\mathfrak{A}_j$ (wie oben), soll $\exists\,(\mathfrak{A}_j)$ Abkürzung für $(\exists\,\mathfrak{v}_{i_1})\,..\,(\exists\,\mathfrak{v}_{i_n})\,[\mathfrak{A}_j\,(\mathfrak{v}_{i_1}, .., \mathfrak{v}_{i_n})]$ sein. Im Unterschied zu ,U' darf ,$\exists$' in keinem Fall fortgelassen werden.

Auch diese Abkürzung ist besonders nützlich für zusammengesetzte Prädikatausdrücke. Man kann z. B. ,$(\exists\,x)\,(Px\,.\,Qx)$' zunächst in ,$(\exists\,x)\,(P\,.\,Q)\,x$' umformen, und dann weiter in ,$\exists\,(P\,.\,Q)$'. Analog kann ,$(\exists\,x)\,(\exists\,y)\,(Rxy \vee Sxy)$' in ,$\exists\,(R \vee S)$' umgeformt werden.

Die Formeln in dem folgenden Lehrsatz ergeben sich einfach durch Anwendung von D1, D2 und D3 auf Formeln, die in L14—1 und 2 genannt sind. Analoge Formeln gelten natürlich auch für Prädikatvariable beliebiger anderer Typen.

L28—1. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr.

a. $\sim U(F) \equiv \exists(\sim F)$.
b. $\sim \exists(F) \equiv U(\sim F)$.
c. $U(F) \equiv \sim \exists(\sim F)$.
d. $\exists(F) \equiv \sim U(\sim F)$.
e. $U(F \supset G) \equiv \sim \exists(F \,.\sim G)$.
f. $U(F \,.\, G) \equiv U(F) \,.\, U(G)$.
g. $\exists(F \vee G) \equiv \exists(F) \vee \exists(G)$.
h. $F \subset G \supset [U(F) \supset U(G)]$.
i. $F \subset G \supset [\exists(F) \supset \exists(G)]$.
j. $U(F \equiv G) \equiv (F \subset G) \,.\, (G \subset F)$.
k. $U(F \equiv G) \supset [U(F) \equiv U(G)]$.
l. $U(F \equiv G) \supset [\exists(F) \equiv \exists(G)]$.
m. $\exists(F \,.\, G) \supset \exists(F) \,.\, \exists(G)$.
n. $U(F) \vee U(G) \supset U(F \vee G)$.
o. $(F \subset G) \,.\, \exists(F \,.\, H) \supset \exists(G \,.\, H)$.
p. $U(F) \supset \exists(F)$.
q. $(F \subset G) \,.\, (G \subset H) \supset (F \subset H)$.

28c. Klassenterminologie. In der Wortsprache sprechen wir zuweilen von Eigenschaften, zuweilen von den „entsprechenden" Klassen. Das ist aber nur ein Unterschied in der Redeweise. Daher ist es nicht nötig, in unserer symbolischen Objektsprache neben den Prädikaten noch besondere Ausdrücke für die entsprechenden Klassen einzuführen. In Sprache C wird derselbe Prädikatausdruck für eine Aussage über die Eigenschaft wie für eine Aussage über die Klasse verwendet. Wenn man z. B. den Satz ‚Pa' in die Wortsprache übersetzen will, so mag man nach Belieben entweder die Eigenschaftsterminologie oder die Klassenterminologie anwenden, d. h. entweder sagen: „a hat die Eigenschaft P", oder: „a gehört zur Klasse P" (oder „a ist ein Element der Klasse P"). Da diese beiden Sätze der Wortsprache denselben Sinn haben, so brauchen wir sie nicht durch zwei verschiedene Sätze der symbolischen Sprache wiederzugeben. In der Klassenterminologie der Wortsprache — die in vielen Fällen üblich und auch bequem ist — können wir den Satz ‚$(P \vee Q)\, a$' wiedergeben durch „a gehört zur Vereinigung der Klassen P und Q", und entsprechend ‚$(P \,.\, Q)a$' durch „a gehört zum Durchschnitt der Klassen P und Q".

Es sei eine beliebige tautologische Satzformel mit Satzvariablen in Sprache A gegeben, z. B. ‚$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \,.\sim q$'. Hieraus erhält man durch Einsetzung die ebenfalls tautologische Satzformel mit Prädikatvariablen ‚$\sim(Fx \vee Gx) \equiv \sim Fx \,.\sim Gx$'. Diese Formel können wir jetzt umformen in ‚$(\sim(F \vee G) \equiv \sim F \,.\sim G)\, x$', und weiter (mit einem vor-

angestellten Alloperator ‚(x)' (nach L13—1e)) in die L-wahre Formel ‚$U(\sim(F \vee G) \equiv \sim F \,.\, \sim G)$' und schließlich in ‚$\sim(F \vee G) \equiv \sim F \,.\, \sim G$'. So entspricht jeder tautologischen Formel mit Satzvariablen eine genau analoge L-wahre Formel mit Prädikatvariablen (von beliebigem Typus). In dieser Weise erhalten wir die Formeln des sogenannten Klassenkalküls der früheren Systeme, jedoch hier in einfacherer Weise durch Verwendung der Prädikate selbst, ohne besondere Klassenausdrücke. Beispiele hierfür werden im folgenden Lehrsatz angegeben; sie ergeben sich nach der beschriebenen Methode aus tautologischen Formeln der Sprache A, die in L8—1, 2 und 6 angegeben worden sind. (Wenn ‚$\supset$' als Hauptverknüpfungszeichen vorkommt, kann es hier nach D3 durch ‚$\subset$' ersetzt werden.) Analoge Formeln gelten natürlich auch für Prädikatvariable beliebiger anderer Typen.

+L28—2. Die folgenden Satzformeln in Sprache C sind L-wahr.

a. $F \vee \sim F$.
b. $\sim(F \,.\, \sim F)$.
c. $F \subset F \vee G$.
d. $F \,.\, G \subset F$.
e. $F \,.\, \sim F \subset G$.
f. $(F \vee G) \,.\, \sim F \subset G$.
g. $F \vee G \equiv G \vee F$.
h. $F \,.\, G \equiv G \,.\, F$.
i. $\sim(F \vee G) \equiv \sim F \,.\, \sim G$.
j. $\sim(F \,.\, G) \equiv \sim F \vee \sim G$.
k. $F \,.\, (G \vee H) \equiv (F \,.\, G) \vee (F \,.\, H)$.
l. $F \vee (G \,.\, H) \equiv (F \vee G) \,.\, (F \vee H)$.
m. $F \equiv (F \vee G) \,.\, (F \vee \sim G)$.
n. $F \equiv (F \,.\, G) \vee (F \,.\, \sim G)$.
o. $F \equiv F \vee (F \,.\, G)$.
p. $F \equiv F \,.\, (F \vee G)$.
q. $F \vee G \equiv F \vee (G \,.\, \sim F)$.
r. $F \,.\, G \equiv F \,.\, (G \vee \sim F)$.

28d. Übungen. Man übersetze folgende Sätze mit Hilfe zusammengesetzter Prädikatausdrücke. Wo immer möglich, lasse man ‚U' fort. — 1. „Jedes Buch ist blau." — 2. „Nicht jedes Buch ist blau." — 3. „Kein Buch ist blau" (d. h. „Jedes Buch ist nicht-blau"). — 4. „Es gibt ein blaues Buch." — 5. „Es gibt ein nicht-blaues Buch." — 6. „Es gibt (genau) 5 blaue Bücher." — 7. „Väter sind männlich" (mit ‚mem_1', 18a). — 8. „Es gibt gerade (Zahlen) und ungerade (Zahlen)." — 9. „Es gibt nicht (Zahlen), die sowohl gerade als ungerade sind." — 10. „Jede (natürliche Zahl) ist ein Erstglied der Vorgängerrelation." — 11. „Nicht jede (natürliche Zahl) ist ein Zweitglied der Vorgängerrelation" (nämlich 0 nicht). — 12. „2 ist eine gerade Primzahl."

29. Identität; Extensionalität

29a. Identität. Wir wollen in Sprache C das Identitätszeichen ‚$=$' nicht nur (wie in Sprache A, **17**) zwischen Individualausdrücken verwenden, sondern (wie in Sprache B) auch zwischen Prädikatausdrücken

und zwischen Funktorausdrücken. Wie in A, so soll auch hier die Identität die Übereinstimmung in allen Eigenschaften sein. Z. B. besagt der Satz ‚$P = Q$', daß die Eigenschaften P und Q alle Eigenschaften von Eigenschaften gemein haben; er ist daher gleichbedeutend mit dem Satz ‚$(N)\,(N(P) \equiv N(Q))$'. Gilt also ‚$P = Q$' und irgend ein Satz über P — wir wollen ihn andeuten durch ‚.. P .. P ..' —, so gilt auch der entsprechende Satz über Q: ‚.. Q .. Q ..'. In analoger Weise besagt der Satz ‚$k_1 = k_2$', wo ‚k_1' und ‚k_2' Funktoren sind, daß die Funktionen k_1 und k_2 in allen Eigenschaften von Funktionen übereinstimmen; er ist also gleichbedeutend mit ‚$(N)\,[N(k_1) \equiv N(k_2)]$'. Gilt also ‚$k_1 = k_2$' und ein Satz über k_1, etwa ‚.. k_1 .. k_1 ..', so auch ‚.. k_2 .. k_2 ..'. Entsprechend gilt der Lehrsatz der Ersetzbarkeit auf Grund der Identität, L24—7 (2).

Der Grundsatz der Identität G8 für den Kalkül B (**22a**, **b**) steht in Übereinstimmung mit dem eben Gesagten. Mit seiner Hilfe ist z. B. aus ‚$a = b$' einerseits ‚$Pa \supset Pb$' ableitbar, und anderseits (durch Einsetzung von ‚$\sim P$') ‚$\sim Pa \supset \sim Pb$' und hieraus mittels Wendung (L8—6i (1)) ‚$Pb \supset Pa$', also schließlich ‚$Pa \equiv Pb$'. So sehen wir, daß in G8 auf der rechten Seite das Implikationszeichen anstatt des Äquivalenzzeichens genügt.

+**L29—1.** Satzformeln der folgenden Formen sind L-wahr ($\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A}_j$ und $\mathfrak{A}_k$ sind Ausdrücke des Typensystems); sie besagen, daß die Identität (total-)reflexiv, symmetrisch und transitiv ist:

a. $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_i$.
b. $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_j \supset \mathfrak{A}_j = \mathfrak{A}_i$.
c. $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_j \,.\, \mathfrak{A}_j = \mathfrak{A}_k \supset \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_k$.

Wie früher (D17—1b), schreiben wir ‚$\neq$' für „nicht-identisch", jetzt auch zwischen Ausdrücken aller Typen. Nichtidentität wird häufig verwendet, wenn im Worttext das Wort „zwei" vorkommt. Z. B. „Für je zwei Punkte gibt es ...": ‚$(x)\,(y)\,(Pt\,(x) \,.\, Pt\,(y) \,.\, x \neq y \supset (\exists z) \ldots)$'.

Beispiele der Anwendung des Identitätszeichens zwischen Prädikatausdrücken: L29—3, L30—1, D30—2; zwischen Funktorausdrücken: **33c**.

Wir wollen zuweilen für Identität ‚I' und für Nichtidentität ‚J' als gewöhnliche Prädikate mit nachgestellten Argumentausdrücken verwenden; das ist in Verbindung mit anderen zweistelligen Prädikaten oft zweckmäßig. Ferner soll ‚$J_3\,(a, b, c)$' heißen, daß a, b, c drei verschiedene Individuen sind; entsprechend wird ‚J_4' für 4 Argumente verwendet usf.

D29—1. $Ixy \equiv x = y$.

D29—2. a. $Jxy \equiv x \neq y$.
b. $J_3\,xyz \equiv x \neq y \,.\, x \neq z \,.\, y \neq z$.
c. $J_4\,xyzu \equiv x \neq y \,.\, x \neq z \,.\, x \neq u \,.\, y \neq z \,.\, y \neq u \,.\, z \neq u$.

29b. Über die Typen logischer Konstanten. Nach D29—1 kann ‚I' zunächst nur mit Individualargumenten auftreten, z. B. ‚Iab'. Da aber ‚$=$' auch zwischen Ausdrücken höherer Stufen verwendet wird, so wollen wir dasselbe auch für ‚I' zulassen; wir haben also auch Sätze von der Form: ‚$I\,(P, Q)$';

‚I (R, S)'; ‚I (M_1, M_2)'. Da die Argumente in verschiedenen Sätzen verschiedene Typen haben, so auch ‚I'. [Und zwar hat ‚I' im ersten Satz den Typus (0, 0), im zweiten ((0), (0)), im dritten ((0, 0), (0, 0)), im vierten (((0)), ((0))); ‚I' ist im ersten Satz von erster Stufe, im zweiten und dritten von zweiter Stufe, im vierten von dritter Stufe.] Nach den früher angegebenen Typenregeln ist das aber nicht zulässig. In der vollständigen Schreibung gemäß den Formregeln muß man anstatt des einen Zeichens ‚I' viele verschiedene Zeichen verwenden, je eines für jeden der Typen, in denen es verwendet werden soll. Diese Zeichen mögen etwa durch Anfügung von Typenbezeichnungen als Indizes gebildet werden: ‚$I_{(0,0)}$', ‚$I_{((0),(0))}$' usw. Da aber für diese verschiedenen Zeichen analoge Lehrsätze gelten, so wollen wir in der Praxis die Typenindizes weglassen und einfach ‚I' schreiben. Aus dem Zusammenhang des Satzes ergibt sich jeweils der Typus von ‚I'.

Ebenso müßten wir bei den Zeichen der Kardinalzahlen ‚0', ‚1' usw. (**17c**) Typenindizes anfügen, z. B. ‚$3_{((0))}$ (P)', ‚$3_{(((0)))}$ (M)' usw. Statt dessen schreiben wir gewöhnlich einfach ‚3 (P)', ‚3 (M)' usw., wobei der Typus des Argumentausdrucks den Typus von ‚3' eindeutig bestimmt. Theoretisch gibt es somit Kardinalzahlen zweiter Stufe, dritter Stufe usw. Die üblichen arithmetischen Lehrsätze gelten aber in gleicher Weise für jede dieser Arten von Kardinalzahlen. Daher schreiben wir sie praktisch nur einmal, ohne Typenindizes, z. B. ‚*sum* (2, 3) = 5' (d. h. „2 + 3 = 5", s. **37b**). Streng genommen, ist der genannte Ausdruck kein Satz in Sprache C. Er vertritt nur die unendliche Klasse von Sätzen, die wir aus ihm erhalten, wenn wir den Zeichen ‚2', ‚3' und ‚5' gleiche Typenindizes (von der Form $((t_i))$) anfügen und zugleich dem Funktor ‚*sum*' einen andern passenden Index (nämlich $(((t_i)), ((t_i)) : ((t_i)))$).

Für jede ohne Typenindex geschriebene logische Konstante (genau genommen, eine Familie verschiedener, aber verwandter, logischer Konstanten von verschiedenen Typen) gibt es einen einfachsten Typus; wir nennen ihn ihren Grundtypus. Z. B. ist der Grundtypus von ‚I' (0, 0), der von ‚2' ((0)), der von ‚*sum*' (((0)), ((0)) : ((0))). (Die in den Beispielen in **21b** für verschiedene logische Konstanten angegebenen Typen sind ihre Grundtypen.)

In Sprache C (wie in den üblichen Systemen mit Typeneinteilung) haben wir somit theoretisch eine unendliche Mehrheit von Arithmetiken, eine für die Kardinalzahlen zweiter Stufe, die sich auf Klassen erster Stufe beziehen, eine andere für die Kardinalzahlen dritter Stufe, die sich auf Klassen zweiter Stufe beziehen, und so fort. Es ergibt sich die Frage, ob diese Vielheit der Arithmetiken vermieden werden kann, ohne daß die Typeneinteilung aufgegeben wird. Durch das genannte Fortlassen der Indizes erreichen wir zwar, daß wir in der praktischen Schreibung nur ein System von arithmetischen Formeln haben, aber die Vielheit der Arithmetiken bleibt natürlich theoretisch bestehen. Eine Möglichkeit, sie zu vermeiden, besteht in der Anfügung transfiniter Stufen. Die niedrigste Stufe, höher als alle endlichen Stufen, wird Stufe ω genannt, die nächste ist Stufe $\omega + 1$ usw. (unter Verwendung der transfiniten Ordinalzahlen der Mengenlehre). Eine Formregel bestimmt, daß ein Prädikat irgend einer transfiniten Stufe Argumentausdrücke beliebiger niederer Stufen annehmen kann. Während deskriptive Prädikate wie bisher den endlichen Stufen zugewiesen werden (z. B. ‚P' der ersten, ‚M' der zweiten usw.), werden die logischen Konstanten als Zeichen transfiniter Stufen definiert. Die Variablen kann man entweder — wie in unseren Sprachsystemen — bestimmten Stufen und Typen zuweisen oder typus-unbestimmt lassen. Wenn die Kardinalzahlzeichen ‚0', ‚1' usw. auf Stufe ω definiert werden, so sind ‚3 (P)', ‚3 (M)' usw. richtige Sätze des Systems (nicht nur abgekürzte, mehrdeutige Schreibweisen, wie bei uns). Ebenso ist ‚*sum* (2, 3) = 5' (mit ‚*sum*' als Funktor der Stufe $\omega + 1$) ein Satz des Systems. In dieser Weise kommt man mit einer Arithmetik aus, die auf deskriptive Klassen beliebiger endlicher Stufen anwendbar ist. Die Verwendung transfiniter Stufen ist bisher nur sehr wenig untersucht worden. Nur kurze An-

deutungen sind von Hilbert und Gödel gegeben worden (s. [Syntax] § 53) und von Tarski ([Wahrheitsbegriff] 136f.). Der erste Versuch eines Systems dieser Art: Frank G. Bruner, Mathematical logic with transfinite types, privat gedruckt, Chicago 1943 (s. die Besprechung in J. Symb. Logic 9, 1944, S. 72).

29c. Extensionalität. ‚$(x)\,(Px \equiv Qx)$' oder kürzer (nach **28b**) ‚$P \equiv Q$' besagt, daß die Eigenschaften P und Q denselben Individuen zukommen, mit andern Worten, daß sie umfangsgleich sind. Wenn dies der Fall ist, so können ‚P' und ‚Q' trotzdem verschiedene Bedeutung haben. Wenn aber ‚$P \equiv Q$' nicht nur wahr, sondern auch L-wahr ist, so haben ‚P' und ‚Q' dieselbe Bedeutung. Während ‚$P \equiv Q$' besagt, daß die Eigenschaften P und Q in bezug auf die Individuen, denen sie zukommen, übereinstimmen, besagt ‚$P = Q$', daß P und Q in bezug auf die Eigenschaften (zweiter Stufe), die ihnen zukommen, übereinstimmen. Ist eine Eigenschaft zweiter Stufe, etwa M, derart, daß sie, sobald sie einer Eigenschaft P zukommt, auch allen mit P umfangsgleichen Eigenschaften zukommt, so heißt sie extensional (d. h. nur von der Extension, dem Umfang abhängig). Z. B. ist die Kardinalzahl 5 eine extensionale Eigenschaft zweiter Stufe, da aus ‚$5\,(P)$' und ‚$P \equiv Q$' ‚$5\,(Q)$' folgt. Es läßt sich zeigen, daß ebenso alle übrigen Eigenschaften von Eigenschaften, die wir mit den bisher eingeführten (und auch den weiterhin noch einzuführenden) Ausdrucksmitteln der Sprache C definieren können, extensional sind. Daher folgt in Sprache C aus ‚$P \equiv Q$' ‚$P = Q$'. Da ferner in jedem Fall der erste dieser Sätze aus dem zweiten folgt, so sind in unserer Sprache die beiden Sätze gleichbedeutend. ‚$(x)\,(Px \equiv Qx)$' und ‚$P = Q$' sind auch in der Tat technisch L-äquivalent im System B, da wir als mögliche Werte für Bewertungen nur Extensionen genommen haben (**25a**). Ferner sind diese beiden Sätze im Kalkül B ableitbar voneinander mit Hilfe des Grundsatzschemas G9 (**22a**). Dasselbe gilt für Prädikatausdrücke aller andern Typen und für Funktorausdrücke beliebiger Typen. Unsere Objektsprachen sind daher extensionale Sprachen.

+**L29—2.** Extensionalität. Die Sätze $(\mathfrak{v}_{k_1})\ (\mathfrak{v}_{k_2})\ ..\ (\mathfrak{v}_{k_n})$ $(\mathfrak{A}_i(\mathfrak{v}_{k_1}, \mathfrak{v}_{k_2}, .., \mathfrak{v}_{k_n})\ \mathfrak{a}_l\ \mathfrak{A}_j(\mathfrak{v}_{k_1}, \mathfrak{v}_{k_2}, .., \mathfrak{v}_{k_n}))$ und $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_j$ sind L-äquivalent; hierbei sind entweder (a) $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_j$ n-stellige Prädikatausdrücke ($n \geqq 1$) desselben Typus und $\mathfrak{a}_l$ ist ‚$\equiv$' oder (b) $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_j$ sind n-stellige Funktorausdrücke desselben Typus und $\mathfrak{a}_l$ ist ‚$=$'.

L29—3. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr.

a. $U\,(F \equiv G) \equiv F = G$. (Aus L2.)
b. $U\,(F) \,.\, U\,(G) \supset F = G$. (Aus (a).)
c. $\sim \exists\,(F) \,.\, \sim \exists\,(G) \supset F = G$. (Aus (a).)
d. $(F \subset G) \,.\, (G \subset F) \equiv (F = G)$. (Aus (a), L28—1j.)
Klassen, die sich gegenseitig enthalten, sind identisch.

Nicht-extensionale Prädikate (mit Sätzen, Prädikatausdrücken oder Funktorausdrücken als Argumentausdrücken) kommen in gewissen logischen Systemen vor, z. B. in der Modalitätslogik. Will man derartige Prädikate in unsere Objektsprache einführen, so muß man im Kalkül G9 aufgeben und

im semantischen System nicht Extensionen, sondern Intensionen als mögliche Werte nehmen. Nicht-extensionale Sprachsysteme sind erheblich komplizierter als extensionale (s. **10b**). Es scheint, daß alles, was man bisher mit Hilfe von nicht-extensionalen Prädikaten ausgedrückt hat, in anderer Weise auch ohne derartige Prädikate ausgedrückt werden kann, also in einer extensionalen Sprache. Es besteht die Vermutung, daß das nicht nur für die bisher bekannten nicht-extensionalen Prädikate gilt, sondern allgemein („Extensionalitätsthese"). Vgl. hierzu [Syntax] § 65—67, [Meaning] § 11 und § 32 (Methode V).

30. Relationsprodukt; Relationspotenzen

30a. Relationsprodukt. In diesem und dem nächsten Paragraphen werden die wichtigsten Begriffe der Logik der (zweistelligen) Relationen erklärt und Symbole für sie eingeführt. Unter dem Relationsprodukt (oder der Verkettung) zweier Relationen R und S, bezeichnet mit ‚$R \mid S$', versteht man diejenige Relation, die dann und nur dann zwischen x und y besteht, wenn es ein u gibt derart, daß x zu u die Relation R und u zu y die Relation S hat.

D30—1. $(H \mid K)\, xy \equiv (\exists\, u)\, (Hxu \,.\, Huy)$.

‚$(R \mid S)\, ab$' heißt somit: „a ist ein R von einem S von b" (z. B.: „.. ein Sohn von einem Bruder ..", „.. größer als die Hälfte von ..").

Der Strich ‚|' hat denselben logischen Charakter wie ein Funktor. Er unterscheidet sich von den Zeichen, die wir hier Funktoren nennen, nur durch den unwesentlichen Umstand, daß er zwischen den beiden Argumentausdrücken steht anstatt davor. Dasselbe gilt für die später einzuführenden Verknüpfungszeichen, die in den folgenden Ausdrücken zwischen den beiden Buchstaben stehen: ‚R ʻʻ P' (D32—6 a), ‚k ʻʻ p' (D32—6 b), ‚R *in* P' (D32—7), ‚R ʻ b' (D35—2). Zur Ersparung von Klammern wollen wir festsetzen, daß alle diese Zeichen stärker binden als die folgenden Zeichen zwischen Prädikatausdrücken: ‚$\vee$', ‚.', ‚$\supset$', ‚$\equiv$', ‚$\subset$', ‚$=$'. Die Klammern um einen Vollausdruck $\mathfrak{A}_i$ des Striches oder der andern vorher genannten Verknüpfungszeichen dürfen also weggelassen werden, wenn $\mathfrak{A}_i$ als Glied eines der letztgenannten Verknüpfungszeichen vorkommt. [Beispiele. Die Klammern in folgenden Ausdrücken dürfen weggelassen werden: ‚$(R \mid S) \vee (R$ *in* $P)$', ‚$(R$ ʻʻ$P) \subset (k$ ʻʻ$Q)$', ‚$(R$ ʻ $b) = a$'; dagegen nicht in folgenden Ausdrücken: ‚$(R_1 \vee R_2) \mid (S_1 \,.\, S_2)$', ‚$(R \vee S)$ ʻʻ $(P \,.\, Q)$'.] Da das Relationsprodukt assoziativ ist, also ‚$(R \mid S) \mid T$' gleichbedeutend mit ‚$R \mid (S \mid T)$' ist (L1 a), so können wir in beiden Ausdrücken die Klammern weglassen und einfach ‚$R \mid S \mid T$' schreiben. Das Relationsprodukt ist jedoch im allgemeinen nicht kommutativ; ‚$R \mid S$' und ‚$S \mid R$' sind im allgemeinen nicht gleichbedeutend („a ist ein Freund eines Lehrers von b" ist verschieden von „a ist ein Lehrer eines Freundes von b").

L30—1. Satzformeln der untenstehenden Formen (a) bis (f) sind L-wahr. (a) ist das assoziative Gesetz, (b) und (c) sind die distributiven Gesetze für Relationsprodukt mit Disjunktion, (d) und (e) mit Konjunk-

tion; man beachte, daß im letzteren Fall nicht Identität, sondern nur Enthaltensein behauptet wird.

+a. $(H_1 \mid H_2) \mid H_3 = H_1 (H_2 \mid H_3)$.
b. $H \mid (K_1 \vee K_2) = H \mid K_1 \vee H \mid K_2$.
c. $(K_1 \vee K_2) \mid H = K_1 \mid H \vee K_2 \mid H$.
d. $H \mid (K_1 \,.\, K_2) \subset H \mid K_1 \,.\, H \mid K_2$.
e. $(K_1 \,.\, K_2) \mid H \subset K_1 \mid H \,.\, K_2 \mid H$.
f. $\exists\, (H \mid K) \equiv \exists\, (mem_2\,(H) \,.\, mem_1\,(K))$.

30b. Relationspotenzen. Für ‚$R \mid R$' wollen wir abkürzend schreiben ‚R^2'; für ‚$R^2 \mid R$' ‚R^3' usw. Diese Relationen nennen wir die Potenzen von R. Besonders die zweite Potenz wird sehr häufig verwendet (z. B. „Freund eines Freundes von", „Vater des Vaters von"). In Analogie hierzu wollen wir unter ‚R^1' die Relation R selbst verstehen und unter ‚R^0' die Identität zwischen R-Gliedern. (‚R^1' wird praktisch kaum verwendet und dient nur zur Vervollständigung der Analogie.) Wir führen nun die Analogie noch weiter ins Gebiet negativer Exponenten. Mit ‚R^{-1}' bezeichnen wir die Konverse (oder Inverse oder Umkehrung) von R, d. h. die Relation, die in allen R-Paaren gilt, aber in umgekehrter Reihenfolge der Glieder. Gilt ‚Rab', so ‚$R^{-1}ba$' und umgekehrt. „Elter" (d. h. „.. ist ein Elternteil, d. h. entweder Vater oder Mutter, von .. ") ist die Konverse von „Kind" und umgekehrt. Die Konverse von „Quadrat" ist „Quadratwurzel". Wenn man will, kann man ferner für ‚$R^{-1} \mid R^{-1}$', das gleichbedeutend ist mit ‚$(R^{-1})^2$' und mit ‚$(R^2)^{-1}$', kurz ‚R^{-2}' schreiben, und entsprechend ‚R^{-3}' usw. einführen.

D30—2. a. $H^0xy \equiv (x = y) \,.\, mem\,(H)\,(x)$.
b. $H^1 = H$.
c. $H^2 = H \mid H$.
d. $H^3 = H^2 \mid H$.
usw.

D30—3. $H^{-1}xy \equiv Hyx$.

L30—2. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr.
+a. $(H^{-1})^{-1} = H$. (Die Konverse der Konversen von R ist R selbst.)
b. $(H \mid K)^{-1} = K^{-1} \mid H^{-1}$.
c. $(H \vee K)^{-1} = H^{-1} \vee K^{-1}$.
d. $(H \,.\, K)^{-1} = H^{-1} \,.\, K^{-1}$.

Die hier definierten Symbole — und allgemein die in diesem Kapitel definierten Konstanten der Sprache C — sind so gemeint, daß sie auch auf geeignete Typen höherer Stufen anwendbar sein sollen (vgl. **29b**). So kann z. B. ‚|' zwischen zweistelligen, homogenen Prädikaten von beliebigem (gleichem) Typus angewendet werden; ‚*Sym*' (D31—1 a) kann als Argumentausdruck einen zweistelligen, homogenen Prädikatausdruck von beliebigem Typus annehmen. Die aufgestellten Lehrsätze gelten in ent-

sprechender Weise für andere Typen; mit andern Worten, der Lehrsatz der Stufenerhöhung (L16—1) kann auf sie angewendet werden.

30c. Ergänzung. Wenn wir in der Sprache eine Variable ‚n' für natürliche Zahlen (0 und positive ganze Zahlen) zur Verfügung haben — wie z. B. in der in **40a** angegebenen Sprachform —, so können wir die unendlich vielen Definitionen D30—2 in folgender Weise durch eine einzige rekursive Definition zusammenfassen:

D30—2*. **a.** $H^0 xy \equiv (x = y) \,.\, mem\,(H)\, x$.
b. $H^{n+1} = H^n \mid H$.

Die Potenzen mit negativen Exponenten können wir so definieren:

D30—3*. $H^{-n} xy \equiv H^n yx$.

Haben wir in der Sprache Variable ‚m' und ‚n' für den Bereich der ganzen Zahlen (d. h. der positiven und negativen ganzen Zahlen einschließlich der Null), so gilt Folgendes:

1. m und n nicht negativ, R beliebig:
‚$R^m \mid R^n = R^{m+n}$' und ‚$(R^m)^n = R^{m \cdot n}$' sind L-wahr.

Beispiele: ‚$R^0 \mid R = R$'; ‚$R^3 \mid R^2 = R^5$'; ‚$(R^3)^2 = R^6$'.

2. m und n beliebig, R eineindeutig:
‚$R^m \mid R^n \subset R^{m+n}$' (nur Enthaltensein!) und ‚$(R^m)^n = R^{m \cdot n}$' sind L-wahr.

Beispiele: ‚$R^5 \mid R^{-3} \subset R^2$'; ‚$(R^{-2})^2 = R^{-4}$'.

Diese Ergebnisse bilden die praktische Begründung für unsere Definitionen für 0 und negative Zahlen als Relationsexponenten. In Sprache C ist jeder einzelne Fall der genannten Lehrsätze mit bestimmten Exponenten L-wahr; Variable als Exponenten kommen dagegen nicht vor. So ist z. B. ‚$Un_{1,2}(H) \supset (H^5 \mid H^{-3} \subset H^2)$' L-wahr in C.

Beispiele. Mit Hilfe der Bezeichnungen für Relationsprodukt und Relationspotenzen können jetzt manche Verwandtschaftsrelationen einfacher definiert werden; vgl. das in **15c** und **17b** angegebene System.

(„Kind“)	1. $Ki = Elt^{-1}$.
(„Bruder“)	2. $Bru = (So \mid Va) \,.\, (So \mid Mu) \,.\, J$. (Analog ‚*Schwe*' für „Schwester“.)
(„Großelter“)	3. $GrElt = Elt^2$.
(„Großvater“)	4. $GrVa = Va \mid Elt$.
(„Enkelkind“)	5. $Enk = Ki^2$.
(„Enkelsohn“)	6. $EnkSo = So \mid Ki$.
(„Ehefrau“)	7. $EhFr = Eh^{-1}$.
(„Ehegatte, männlich oder weiblich“)	8. $EhG = Eh \vee EhFr$.
(„Schwager“)	9. $Schwa = Bru \mid EhFr \vee Eh \mid Schwe$.
(„Stiefbruder“)	10. $StBru = So \mid Elt \,.\, \sim Bru \,.\, J$.
(„Schwiegervater“)	11. $SchVa = Va \mid EhG$.
(„Onkel“)	12. $On = (Bru \vee Schwa) \mid Elt$.

Übungen. 1. Man definiere in dem soeben behandelten System der Verwandtschaftsrelationen die folgenden Begriffe: a. „Schwester“; b. „Großmutter“; c. „Enkeltochter“; d. „Schwägerin“; e. „Stiefschwester“; f. „Schwiegermutter“; g. „Schwiegersohn“; h. „Schwiegertochter“; i. „Tante“; j. „Neffe“; k. „Nichte“.

Man übersetze die folgenden Sätze. 2. „a ist Vater eines Freundes von b“. — 3. „Ein Freund eines Freundes eines (Menschen) ist zuweilen (d. h.: es gibt . .) sein Freund“ (a. mit Variablen; b. ohne Variable (nach 28)). — 4. „Ist

eine (Zahl) kleiner als der Vorgänger einer andern, so ist sie (auch) kleiner als die andere" (a. mit, b. ohne Variable). — 5. „Ist eine (Zahl) Vorgänger des Vorgängers einer geraden (Zahl), so ist sie (auch) gerade."

31. Verschiedene Arten von Relationen

31 a. Darstellungen von Relationen. Der Umfang (oder die Extension) eines n-stelligen Prädikates erster Stufe, und zugleich der durch das Prädikat bezeichneten n-stelligen Relation, ist die Klasse der geordneten n-tupel von Individuen, für die das Prädikat gilt. Den Umfang eines Prädikates (oder der betreffenden Relation) kann man, wenn er endlich ist, durch eine Umfangsliste angeben, d. h. durch Aufzählung der zugehörigen n-tupel, z. B. den Umfang einer zweistelligen Relation durch eine Liste der zugehörigen Paare. Bei einer endlichen zweistelligen Relation sind neben der Paarliste zwei andere Methoden zur Angabe des Umfanges wegen ihrer Anschaulichkeit oft von Vorteil, nämlich die Pfeilfigur und die Matrix.

In der Pfeilfigur einer Relation R werden die R-Glieder durch Punkte dargestellt (s. Abb. 1). Ist a, b ein R-Paar — d. h. gilt ‚*Rab*' —, so zeichnet man einen Pfeil, der vom Punkt a zum Punkt b führt. Gelten ‚*Rab*' und ‚*Rba*', so zeichnet man einen Doppelpfeil zwischen a und b. Gilt ‚*Raa*', so zeichnet man beim Punkt a einen Rückkehrpfeil.

Die Matrix der Relation R, die n Glieder hat, besteht aus einem Schema von n Zeilen und n Kolonnen derart, daß dem i-ten Glied ($i = 1$ bis n, in beliebiger Reihenfolge) die i-te Zeile und die i-te Kolonne zugeordnet ist (s. Abb. 2). Gilt ‚*Rab*', so schreibt man an die Kreuzungsstelle der Zeile a mit der Kolonne b die Ziffer ‚1', und andernfalls ‚0'. Die mit ‚1' besetzten Stellen heißen kurzweg besetzt, die andern unbesetzt. Die Diagonale von links oben nach rechts unten heißt Hauptdiagonale; auf ihr liegen die Stellen, die den identischen Paaren a, a, b, b usw. entsprechen. Zwei Stellen, die symmetrisch in bezug auf die Hauptdiagonale liegen (z. B. b, d und d, b), heißen konjugiert zueinander.

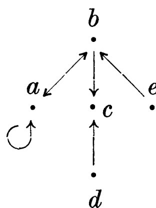


Abb. 1. Pfeilfigur der Relation R

	a	b	c	d	e
a	1	1	0	0	0
b	1	0	1	0	0
c	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0
e	0	1	0	0	0

Abb. 2. Matrix der Relation R

Beispiele. Die Paarliste der Relation R sei: „*aa, ab, ba, bc, dc, eb*". Abb. 1 ist eine Pfeilfigur von R. Offenbar kommt es bei der Pfeilfigur nicht auf die räumliche Lage und Entfernung der Punkte an, sondern nur auf den durch die Pfeile angegebenen Zusammenhang. Wird Abb. 1 so transformiert, daß dieser Zusammenhang erhalten bleibt, so ist die neue Pfeilfigur ebenfalls eine Pfeilfigur von R. — Abb. 2 ist eine Matrix von R. Eine andere Matrix von R erhalten wir aus ihr, indem wir die Reihenfolge der Zeilen in beliebiger Weise ändern und die Reihenfolge der Kolonnen in der entsprechenden Weise ändern.

31b. Asymmetrie, Transitivität, Reflexivität. Eine Relation R heißt symmetrisch, wenn in jedem R-Paar R auch in der umgekehrten Richtung gilt: ‚$(x)\,(y)\,(Rxy \supset Ryx)$‘ oder kürzer: ‚$R \subset R^{-1}$‘. Beispiel: ist a parallel mit b, so auch b parallel mit a; also ist die Relation Parallel symmetrisch. Beispiele anderer symmetrischer Relationen: Ähnlich, Gleichaltrig, Geschwister (d. h. „x ist ein Geschwister — entweder Bruder oder Schwester — von y“). R heißt nicht-symmetrisch, wenn die genannte Bedingung nicht erfüllt ist, wenn also ‚$\sim (R \subset R^{-1})$‘ gilt; mit andern Worten, wenn es mindestens ein Paar gibt, in dem R nur in der einen Richtung gilt, wenn also ‚$\exists\,(R \,.\, \sim R^{-1})$‘ gilt. R heißt insbesondere asymmetrisch, wenn in keinem Paar R in beiden Richtungen besteht, wenn also R und die Konverse von R sich ausschließen: ‚$R \subset \sim R^{-1}$‘. Beispiele: Vater, Kleiner. Beispiel für eine Relation, die weder symmetrisch noch asymmetrisch ist: Bruder. Die definierten Eigenschaften von Relationen stellen eine Dreiteilung aller (homogenen, zweistelligen) Relationen dar, s. Abb. 3.

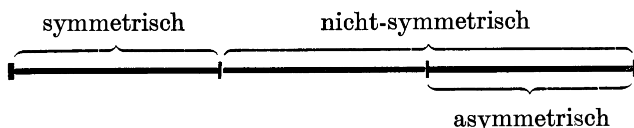


Abb. 3

Die Pfeilfigur einer symmetrischen Relation enthält nur Doppelpfeile (zu denen auch die Rückkehrpfeile gehören), die einer asymmetrischen Relation enthält keinen Doppelpfeil. Die Matrix einer symmetrischen Relation ist symmetrisch in bezug auf die Hauptdiagonale, d. h. eine zu einer besetzten Stelle konjugierte Stelle ist auch besetzt. In der Matrix einer asymmetrischen Relation ist jede zu einer besetzten Stelle konjugierte Stelle unbesetzt.

Eine andere Dreiteilung aller (homogenen, zweistelligen) Relationen geschieht durch die folgenden Begriffe. R heißt transitiv, wenn Folgendes gilt: ‚$(x)\,(y)\,(z)\,(Rxy \,.\, Ryz \supset Rxz)$‘ oder kurz ‚$R^2 \subset R$‘. Beispiel: wenn a parallel mit b und b parallel mit c, so auch a parallel mit c; also ist die Relation Parallel transitiv; ebenso Ähnlich, Kleiner, Kleiner-oder-Gleich, Vorfahre. Ist die genannte Bedingung nicht erfüllt, so heißt R nicht-transitiv. Schließen R^2 und R sich aus, gilt also ‚$R^2 \subset \sim R$‘, so heißt R intransitiv. Beispiele: Vater, Nachfolger (in der Reihe der natürlichen Zahlen). Bruder und Freund sind weder transitiv noch intransitiv. Kennzeichen der Transitivität in der Pfeilfigur: Geht von a nach c eine Kette von zwei Pfeilen, d. h. ein Pfeil von a nach irgend einem Punkt und ein Pfeil von diesem Punkt nach c, so geht stets auch ein Pfeil direkt von a nach c.

Eine dritte Dreiteilung wird in folgender Weise vorgenommen. R heißt reflexiv, wenn jedes R-Glied die Relation R zu sich selbst hat, wenn also ‚$(x)\,(mem\,(R)\,x \supset Rxx)$‘ oder kürzer ‚$R^0 \subset R$‘ gilt. Beispiele: Gleich-

altrig, Gleichlang, Kleiner-oder-Gleich. Ist die genannte Bedingung nicht erfüllt, so heißt R nicht-reflexiv. Und wenn kein R-Glied die Relation R zu sich selbst hat, mit andern Worten, wenn Identität und R sich ausschließen, so heißt R irreflexiv: ‚$R^0 \subset \sim R$' oder ‚$R \subset J$'. Beispiele: Vater; Bruder; Kleiner. Die folgenden Relationen sind weder reflexiv noch irreflexiv: .. ist Wähler von ..; .. ist Mörder von ... Hat jedes Individuum die Relation R zu sich selbst, gilt also ‚$(x)\,(Rxx)$' oder ‚$I \subset R$', so heißt R total-reflexiv; das ist dann und nur dann der Fall, wenn R reflexiv ist und alle Individuen R-Glieder sind.

In der Pfeilfigur einer reflexiven Relation hat jeder Punkt einen Rückkehrpfeil. Dasselbe gilt für eine totalreflexive Relation; bei dieser umfaßt außerdem die Figur alle Individuen. Die Figur einer irreflexiven Relation hat keine Rückkehrpfeile. In der Matrix einer reflexiven Relation sind alle Stellen der Hauptdiagonale besetzt, bei einer irreflexiven Relation unbesetzt.

R heißt zusammenhängend — in Zeichen: ‚*Connex* (R)' (connexus, Zusammenhang) —, wenn zwischen zwei verschiedenen R-Gliedern stets R oder R^{-1} besteht. Beispiel: Kleiner (für natürliche Zahlen); sind a und b verschiedene natürliche Zahlen, so ist entweder a kleiner als b oder b kleiner als a. In der Pfeilfigur einer zusammenhängenden Relation besitzt jedes Punktpaar mindestens in einer Richtung einen Pfeil. In der Matrix einer zusammenhängenden Relation ist von je zwei konjugierten Stellen mindestens eine besetzt.

R heißt (eine reihenbildende Relation oder kurz) eine Reihe — ‚*Ser* (R)' (series, Reihe) —, wenn R irreflexiv, transitiv und zusammenhängend ist.

Unter einer Reihe verstehen wir somit nicht eine Klasse, sondern eine Relation. Ein und dieselbe Klasse kann in verschiedener Weise geordnet werden, einige dieser Ordnungen mögen Reihen sein, andere nicht. Ob eine Reihe vorliegt, hängt also nicht von der Klasse ab, sondern von der ordnenden Relation. Durch die Klasse ist die ordnende Relation nicht bestimmt, wohl aber umgekehrt die Klasse durch die Relation, nämlich als ihr Feld. — Der in der Mengenlehre übliche Ausdruck „geordnete Mengen" für die Reihen ist irreführend. Man kann ja nicht die Mengen — in der Terminologie der Logik: die Klassen — einteilen in geordnete und ungeordnete, sondern die Relationen in reihenbildende — die wir kurz Reihen nennen — und andere.

31c. Lehrsätze über Relationen. In den folgenden Definitionen führen wir Symbole für die vorher erläuterten Begriffe in die Sprache C ein, z. B. ‚*Sym*' für „symmetrisch" usw. Da es sich um Eigenschaften von (homogenen, zweistelligen) Relationen handelt, sind die Zeichen ‚*Sym*' usw. (wenn auf Relationen erster Stufe angewendet) einstellige Prädikate zweiter Stufe vom Typus ((0, 0)).

D31—1. **a.** $Sym\,(H) \equiv (H \subset H^{-1})$.
b. $As\,(H) \equiv (H \subset \sim H^{-1})$.

D31—2. **a.** $Trans\,(H) \equiv (H^2 \subset H)$.
b. $Intr\,(H) \equiv (H^2 \subset \sim H)$.

D31—3. **a.** $Refl\,(H) \equiv (H^0 \subset H)$.
b. $Irr\,(H) \equiv (H \subset J)$.
c. $Reflex\,(H) \equiv (I \subset H)$ (total-reflexiv).

D31—4. $Connex\,(H) \equiv (x)\,(y)\,[mem\,(H)\,x \,.\, mem\,(H)\,y \,.\, x \neq y \supset Rxy \vee Ryx]$.

D31—5. $Ser = Irr \,.\, Trans \,.\, Connex$.

Auf Grund dieser Definitionen gelten die folgenden Lehrsätze.

L31—1. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr.
+**a.** $Refl\,(H) \equiv (x)\,(mem\,(H)\,x \supset Hxx)$.
+**b.** $Reflex\,(H) \equiv (x)\,Hxx$.
c. $Reflex\,(H) \equiv Refl\,(H) \,.\, U(mem\,(H))$.
+**d.** $Trans \,.\, Sym \subset Refl$.
Jede transitive, symmetrische Relation ist reflexiv.

Beweis. R sei (1) transitiv, (2) symmetrisch. (3) a sei ein Glied von R. Wir müssen zeigen, daß Raa. Aus (3): Es gibt ein Individuum, etwa b, derart, daß Rab oder Rba. Aus (2): Sowohl Rab wie Rba. Hieraus nach (1): Raa.

e. $As\,(H) \equiv Irr\,(H^2)$.

Beweis. 1. Angenommen, es gebe Individuen, etwa a und b, derart, daß R in beiden Richtungen für sie gilt: Rab und Rba. Dann ist R nicht asymmetrisch und, da R^2aa gilt, so ist R^2 nicht irreflexiv. — 2. Angenommen, es gebe kein derartiges Paar von Individuen. Dann ist R asymmetrisch, und R^2 ist irreflexiv (denn sonst gäbe es ein Individuum, etwa a, derart, daß R^2aa; also gäbe es ein Individuum, etwa b, derart, daß Rab und Rba).

+**f.** $As \subset Irr$.

Asymmetrische Relationen sind irreflexiv.

Beweis. R sei nicht irreflexiv. Dann gibt es ein Individuum, etwa a, derart, daß Raa. Daher auch $R^{-1}aa$. Also ist R nicht asymmetrisch.

+**g.** $Trans \,.\, As = Trans \,.\, Irr$.

Unter den transitiven Relationen sind die asymmetrischen irreflexiv und umgekehrt.

Beweis. 1. R sei transitiv und asymmetrisch. Dann ist R irreflexiv, nach (f). — 2. R sei transitiv und irreflexiv. Angenommen, es gäbe zwei Individuen, etwa a und b, für die R in beiden Richtungen gälte: Rab und Rba. Dann gälte wegen der Transitivität Raa, im Widerspruch zur Irreflexivität. Daher kann es kein solches Paar geben. Also ist R asymmetrisch.

+**h.** $Sym\,(H) \equiv Sym\,(H^{-1})$.
Ist eine Relation symmetrisch, so auch ihre Konverse; und umgekehrt. Analoges gilt auch für jeden andern der in D1 bis 5 definierten Begriffe.

i. $As\,(H) \,.\, (K \subset H) \supset As\,(K)$.
Jede Teilrelation einer asymmetrischen Relation ist selbst asymmetrisch. Analoge Sätze gelten für ‚*Intr*' und ‚*Irr*' (dagegen nicht für die andern vorhin definierten Eigenschaften von Relationen).

j. $Irr(H^2) \supset Irr(H)$.
$Irr(H^3) \supset Irr(H)$ usw.

Wenn die zweite Potenz einer Relation irreflexiv ist, so auch die Relation selbst. Ebenso für jede andere positive Potenz.

Beweis. Angenommen, R sei nicht irreflexiv. Dann gibt es ein Individuum, etwa a, derart, daß Raa. Daher auch R^2aa, R^3aa usw. Also sind R^2, R^3 usw. auch nicht irreflexiv.

k. $Trans(H) \,.\, Irr(H) \supset Irr(H^2)$,
$Trans(H) \,.\, Irr(H) \supset Irr(H^3)$ usw.

Wenn eine Relation transitiv und irreflexiv ist, so ist auch jede positive Potenz von ihr irreflexiv.

Beweis. R sei transitiv und irreflexiv. Für ein bestimmtes n ($n \geqq 2$) sei R^n nicht irreflexiv. Dann gibt es ein Individuum, etwa a_1, derart, daß $R^n a_1 a_1$. Also gibt es Individuen $a_2, a_3, .., a_{n-1}$, derart, daß Ra_1a_2, Ra_2a_3, .., $Ra_{n-2}\,a_{n-1}$, $Ra_{n-1}\,a_1$. Daher hat, weil R transitiv ist, a_1 die Relation R auch zu a_3, zu a_4, .., zu a_{n-1} und zu a_1. Dies ist unmöglich, weil R irreflexiv ist. Also muß R^n irreflexiv sein.

+l. $Ser = As \,.\, Trans \,.\, Connex$. (Aus (g).)

m. $Ser(H) \equiv Connex(H) \,.\, Irr(H^2) \,.\, Irr(H^3)$.

Beweis. 1. Angenommen, R sei eine Reihe. Wir wollen zeigen, daß R die drei Bedingungen rechts erfüllt. R ist zusammenhängend, transitiv und irreflexiv (D5). Also sind auch R^2 und R^3 irreflexiv (k). — 2. R erfülle die drei Bedingungen rechts. Dann ist R irreflexiv (j) und asymmetrisch (e). Wir wollen zeigen, daß R transitiv ist. Es gelte Rab und Rbc; wir müssen zeigen, daß Rac. a und c sind verschieden, weil R asymmetrisch ist. Da R zusammenhängend ist, so Rac oder Rca. Rca gilt nicht, denn sonst gälte R^3aa (da Rab und Rbc gelten), im Widerspruch zur Irreflexivität von R^3. Also muß Rac gelten. Also ist R transitiv und eine Reihe.

n. $Ser(H) \equiv Connex(H) \,.\, Irr(H^6)$.

Beweis. 1. R sei eine Reihe. Dann ist R zusammenhängend, transitiv und irreflexiv. Daher ist auch R^6 irreflexiv (k). — 2. R erfülle die beiden Bedingungen rechts. Wir wollen zeigen, daß R eine Reihe ist. R^6 ist dasselbe wie $(R^2)^3$ und wie $(R^3)^2$. Da $(R^2)^3$ irreflexiv ist, so auch R^2 (j). Da $(R^3)^2$ irreflexiv ist, so auch R^3. Also ist R eine Reihe (m).

31d. Eineindeutigkeit. Die in Sprache A definierten Prädikate ‚Un_1', ‚Un_2' und ‚$Un_{1,2}$' (D19—1, 2, 3) können in Sprache C auch in folgender Weise ohne Verwendung von Individualvariablen definiert werden:

D31—6. $Un_1(H) \equiv (H \mid H^{-1} \subset I)$.

D31—7. $Un_2(H) \equiv (H^{-1} \mid H \subset I)$.

D31—8. $Un_{1,2} = Un_1 \,.\, Un_2$.

Pfeilfigur: Bei einer voreindeutigen Relation geht von jedem Punkt höchstens ein Pfeil aus, bei einer nacheindeutigen Relation geht zu jedem Punkt höchstens ein Pfeil hin; bei einer eineindeutigen berühren sich nie zwei Pfeile mit den Endpunkten oder mit den Spitzen. Matrix: Bei

einer voreindeutigen Relation hat jede Kolonne höchstens eine besetzte Stelle, bei einer nacheindeutigen Relation hat jede Zeile höchstens eine besetzte Stelle, bei einer eineindeutigen Relation gilt beides.

+**L31—2.** Die folgenden Satzformeln sind L-wahr.

a. $Un_1(H) \equiv Un_2(H^{-1})$.
b. $Un_2(H) \equiv Un_1(H^{-1})$.
c. $Un_{1,2}(H) \equiv Un_{1,2}(H^{-1})$.

32. Weitere logische Prädikate, Funktoren und Verknüpfungen

32a. Leere Klasse und Allklasse. Wir wollen das einstellige Prädikat erster Stufe ‚Λ_1' so definieren, daß jeder Vollsatz, z. B. ‚$\Lambda_1(a)$', L-falsch ist. Zur Definition von ‚$\Lambda_1(x)$' können wir eine beliebige L-falsche Satzformel mit der freien Variablen x verwenden, z. B. ‚$x \neq x$'. Man sagt auch, ‚Λ_1' bezeichne die leere Klasse (nach G9 (**22a**) gibt es in jedem Typus nur eine leere Klasse, s. unten L1b). Ebenso wollen wir das zweistellige Prädikat ‚Λ_2' so definieren, daß jeder Vollsatz L-falsch ist. Λ_2 wird die leere (zweistellige) Relation genannt. Entsprechend kann man ‚Λ_3' für die leere dreistellige Relation definieren usw.

Wir wollen das einstellige Prädikat ‚V_1' so definieren, daß jeder Vollsatz L-wahr ist. Zur Definition können wir eine beliebige L-wahre Satzformel verwenden, z. B. ‚$x = x$'. Man nennt V_1 auch die universelle Klasse oder die Allklasse. Ebenso definieren wir ‚V_2' so, daß jeder Vollsatz L-wahr ist. V_2 heißt die (zweistellige) universelle Relation. Entsprechend können wir ‚V_3' für die universelle dreistellige Relation definieren usf.

D32—1. **a.** $\Lambda_1(x) \equiv x \neq x$.
b. $\Lambda_2(x, y) \equiv x \neq x \,.\, y \neq y$.
Entsprechend für ‚Λ_3' usw.

D32—2. **a.** $V_1(x) \equiv (x = x)$.
b. $V_2(x, y) \equiv (x = x) \,.\, (y = y)$.
Entsprechend für ‚V_3' usw.

L32—1. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr. (Analoges gilt für andere Indizes: ‚Λ_2' usw.)

a. $\sim \exists (\Lambda_1)$.
+**b.** $\sim \exists (F) \equiv (F = \Lambda_1)$. (Aus (a), L29—3c.)
c. $U(V_1)$.
d. $U(F) \equiv (F = V_1)$. (Aus (c), L29—3b.)
+**e.** $\Lambda_1 \subset F$.
Die leere Klasse ist in jeder Klasse enthalten.
+**f.** $F \subset V_1$.
Jede Klasse ist in der Allklasse enthalten.
g. $\Lambda_1 = \sim V_1$.

32b. Vereinigungsklasse und Durchschnittsklasse. Ist M eine Klasse von Klassen, so bezeichnen wir die Klasse aller Individuen, die zu mindestens einer der Elementklassen von M gehören, als die Vereinigungsklasse oder Klassensumme von M; sie wird symbolisch bezeichnet mit ‚$sm_1(M)$', wo ‚sm_1' ein Funktor ist. Ist M eine Klasse von zweistelligen Relationen, so bezeichnen wir diejenige Relation, die dann und nur dann für ein Paar gilt, wenn mindestens eine der Elementrelationen von M für dieses Paar gilt, als die Vereinigungsrelation von M, ‚$sm_2(M)$'. Entsprechend wird der Funktor ‚sm_3' für eine Klasse von dreistelligen Relationen definiert usf.

Ist M eine Klasse von Klassen, so nennen wir die Klasse derjenigen Individuen, die zu jeder Elementklasse von M gehören, die Durchschnittsklasse oder das Klassenprodukt von M, ‚$pr_1(M)$'. Entsprechend werden die Funktoren ‚pr_2', ‚pr_3' usw. für eine Klasse von zweistelligen bzw. dreistelligen usw. Relationen definiert.

D32—3. a. $sm_1(N)\,x \equiv (\exists F)(N(F) \,.\, Fx)$.
b. $sm_2(N)\,x\,y \equiv (\exists H)(N(H) \,.\, Hxy)$.
Entsprechend für ‚sm_3' usw.

D32—4. a. $pr_1(N)\,x \equiv (F)(N(F) \supset Fx)$.
b. $pr_2(N)\,x\,y \equiv (H)(N(H) \supset Hxy)$.
Entsprechend für ‚pr_3' usw.

Die Klasse der Teilklassen einer gegebenen Klasse Q wollen wir mit ‚$sub_1(Q)$' bezeichnen, die Klasse der Teilrelationen einer (zweistelligen) Relation S mit ‚$sub_2(S)$'.

D32—5. a. $sub_1(F)(G) \equiv (G \subset F)$.
b. $sub_2(H)(K) \equiv (K \subset H)$.
Entsprechend wird ‚sub_3' usw. definiert.

32c. Verknüpfungen von Relationen und Klassen. Die Klasse derjenigen Individuen, die zu mindestens einem Element von Q in der Relation R stehen, wollen wir mit ‚R " Q' bezeichnen. ‚R " Q' ist ein einstelliger Prädikatausdruck; ein Vollsatz hiervon, etwa ‚$(R$ " $Q)\,a$', besagt: „a steht zu einem Element von Q in der Relation R". ‚R " Q' können wir lesen: „die R von den Q".

Sind $a, b, c, \ldots$ die Elemente von Q, so bezeichnen wir die Klasse der Individuen $k(a)$, $k(b)$, $k(c)$ usw. — wo ‚k' ein Funktor ist — mit ‚k " Q'. (Die Definition enthält an Stelle der Konstanten ‚k' eine Funktorvariable ‚f'.)

D32—6. a. $(H \text{ " } F)\,x \equiv (\exists y)(Fy \,.\, Hxy)$.
b. $(f \text{ " } F)\,x \equiv (\exists y)(Fy \,.\, x = fy)$.

Beispiele. 1. ‚*Va* " *Stud*' bezeichnet die Eigenschaft, Vater eines Studenten zu sein; in der Plural-Sprechweise ausgedrückt: die Väter der Studenten. — ‚*quadr* " *Prim*' heißt: „die (Klasse der) Quadrate der Primzahlen".

Ist eine Relation R und eine Klasse P gegeben, so wird zuweilen diejenige Teilrelation von R betrachtet, die wir aus R erhalten, wenn wir das Feld auf P beschränken, d. h. diejenige Relation, die nur dann zwischen x und y besteht, wenn R zwischen ihnen besteht und x und y beide zu P gehören. Diese Relation wollen wir mit ‚*R in P*' bezeichnen. (Analog für Relationen höheren Grades.)

D32—7. $(H \; in \; F) \, x \, y \equiv Hxy \, . \, Fx \, . \, Fy.$

Beispiele. 1. Ist Q die Klasse der Engländer, so bezeichnet ‚*Va in Q*' die Vaterrelation zwischen Engländern. — 2. ‚*Kl in Prim*' bezeichnet die Relation Kleiner zwischen Primzahlen.

Die Klasse der Anfangsglieder von R (**18a**) bezeichnen wir mit ‚*init* (R)'. Für die Klasse der Endglieder brauchen wir keinen neuen Funktor; diese Klasse kann mit ‚*init* (R^{-1})' bezeichnet werden, da die Endglieder von R die Anfangsglieder der Konversen von R sind.

D32—8. $init\,(H)\, x \equiv mem_1\,(H)\, x \, . \sim mem_2\,(H)\, x.$

32d. Lehrsätze.

L32—2. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr. (Analoges gilt für andere Indizes: ‚sm_2' usw.)

a. $N\,(F) \supset (F \subset sm_1\,(N)).$
b. $N\,(F) \supset (pr_1\,(N) \subset F).$
c. $Ser\,(H) \supset Ser\,(H \; in \; F).$

Jede Relation, die durch Beschränkung des Feldes einer Reihe entsteht, ist auch eine Reihe. Analoge Sätze gelten für ‚*Sym*', ‚*As*', ‚*Trans*', ‚*Intr*', ‚*Refl*', ‚*Irr*', ‚*Connex*', ‚$Un_{1,\,2}$' (**31**).

L32—3. Die beiden Sätze in jedem der folgenden Satzpaare sind L-äquivalent. (Die willkürlich genommenen Konstanten ‚P', ‚M' und ‚R' können durch beliebige Prädikatausdrücke desselben Typus ersetzt werden.)

a. ‚$sm_1\,(M) \subset P$' und ‚$(F)\,[M\,(F) \supset (F \subset P)]$'.
b. ‚$P \subset pr_1\,(M)$' und ‚$(F)\,[M\,(F) \supset (P \subset F]$'.
c. ‚$\sim \exists\,(init\,(R))$' und ‚$mem_1\,(R) \subset mem_2\,(R)$'.

32e. Aufzählungsklassen. Die Eigenschaft, das Individuum a zu sein — mit andern Worten: die Klasse, deren einziges Element a ist, wir nennen sie die Einerklasse von a —, wollen wir mit ‚$\{a\}$' bezeichnen. Ferner die Eigenschaft, entweder a oder b zu sein — die Klasse der Elemente a und b —, mit ‚$\{a; b\}$'; entsprechend definieren wir ‚$\{a; b; c\}$' usf. Die zweistellige Relation, deren einziges Paar a, b (in dieser Reihenfolge) ist, bezeichnen wir mit ‚$\{a, b\}$'. Die Klasse $\{a; b\}$ ist dieselbe wie $\{b; a\}$. Dagegen sind die beiden Relationen $\{a, b\}$ und $\{b, a\}$ verschieden (falls a und b nicht identisch sind). ‚$\{a, b; c, d\}$' soll die Relation bezeichnen, deren einzige Paare a, b und c, d sind; entsprechend werden ‚$\{a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2\}$' usw. definiert. Analoge Definitionen können auch für drei- und mehrstellige Relationen aufgestellt werden, z. B. ‚$\{a, b, c\}$'.

D32—9. **a.** $\{x\}(u) \equiv (u = x)$.
b. $\{x; y\} = \{x\} \vee \{y\}$.
c. $\{x; y; z\} = \{x\} \vee \{y\} \vee \{z\}$.

In entsprechender Weise können Klassen mit vier oder mehr Elementen durch Aufzählung definiert werden.

D32—10. **a.** $\{x, y\}(u, v) \equiv (u = x) \cdot (v = y)$.
b. $\{x, y; z, w\} = \{x, y\} \vee \{z, w\}$.

Entsprechend werden zweistellige Relationen mit drei oder mehr Paaren durch Aufzählung der Paare definiert.

D32—11. $\{x, y, z\}(u, v, w) \equiv (u = x) \cdot (v = y) \cdot (w = z)$.

Entsprechend werden dreistellige Relationen mit zwei oder mehr Tripeln definiert. In ähnlicher Weise können n-stellige Relationen, die nur für eine endliche Anzahl m von gegebenen n-tupeln gelten, durch Aufzählung dieser n-tupel definiert werden.

L32—4. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr.

a. $\{x\}\, x$.
b. $\{x; y\}\, u \equiv u = x \vee u = y$.
c. $\{x; y; z\}\, u \equiv u = x \vee u = y \vee u = z$.
d. $\{x, y; z, w\}\, uv \equiv (u = x \,.\, v = y) \vee (u = z \,.\, v = w)$.
e. $Fx \equiv (\{x\} \subset F)$.
f. $Hxy \equiv (\{x, y\} \subset H)$.

In Teil II, Anwendungen der symbolischen Logik, können jetzt die Axiomensysteme in **44a** und **46b** auch in der Formulierung in Sprache C gelesen werden.

33. Der λ-Operator

33a. λ-Operator. ‚M‘ sei ein einstelliges Prädikat zweiter Stufe, bezeichne somit eine Eigenschaft von Eigenschaften von Individuen. So besagt z. B. ‚$M(P)$‘, daß die Eigenschaft erster Stufe P die Eigenschaft zweiter Stufe M habe. (Um ein bestimmtes Beispiel vor sich zu haben, denke man etwa an eine Kardinalzahl, z. B. 5; ‚$5(P)$‘ besagt, daß P die Kardinalzahl 5 — als eine Eigenschaft von Eigenschaften — habe.) Will man ausdrücken, daß die in dem Satz ‚$Pa \vee Qa$‘ von a ausgesagte Eigenschaft die Eigenschaft M besitze, so kann man das mit Hilfe der bisherigen Symbolik tun, da man ja für ‚$Pa \vee Qa$‘ ‚$(P \vee Q)\,a$‘ schreiben kann; der gemeinte Satz ist also so zu schreiben: ‚$M(P \vee Q)$‘. [Beispiel: ‚$5(P \vee Q)$‘, in Worten: „Die Disjunktion der Eigenschaften P und Q (oder: die Vereinigung der Klassen P und Q) hat die Kardinalzahl 5“.] In andern Fällen haben wir dagegen in unserer bisherigen Symbolik keinen Prädikatausdruck für die in einem zusammengesetzten Satz über ein Individuum ausgesagte Eigenschaft, z. B. nicht für die Eigenschaft, die in dem Satz ‚$Pa \vee (y)\, Rya$‘ dem Individuum a zugeschrieben wird. Wir führen nun das Operatorzeichen ‚λ‘ ein, um für jede in einem Satz der Sprache C aussagbare Eigenschaft einen Prädikatausdruck bilden zu können. Die

soeben genannte Eigenschaft wird dann durch den Prädikatausdruck ‚$(\lambda x)(Px \vee (y)\, Ryx)$' bezeichnet. In einem Ausdruck der Form ‚$(\lambda x)(\ldots x \ldots)$' — wir nennen ihn einen λ-Ausdruck — ist ‚(λx)' ein Operator, den wir λ-Operator nennen; ‚$\ldots x \ldots$' ist der zugehörige Operand; also ist ‚x' in ‚$(\lambda x)(\ldots x \ldots)$' gebunden. Wenn ‚$\ldots x \ldots$' eine Satzformel ist, so entspricht ‚$(\lambda x)(\ldots x \ldots)$' etwa dem Wortausdruck „die Eigenschaft von x, daß $\ldots x \ldots$" oder „die Klasse derjenigen x, für die $\ldots x \ldots$". Die Einführung des λ-Ausdrucks, etwa in dem vorhin genannten Beispiel, wäre nicht nötig, wenn es sich nur darum handeln würde, die bezeichnete Eigenschaft irgend einem Individuum, etwa b, zuzuschreiben. Denn dies kann man einfach durch den Satz ‚$Pb \vee (y)\, Ryb$' ausdrücken, die kompliziertere Formulierung ‚$(\lambda x)(Px \vee (y)\, Ryx)\, b$' ist dafür nicht nötig; nach der gegebenen Erläuterung des λ-Ausdrucks besagen die beiden genannten Sätze dasselbe. Demgemäß ist im Kalkül B das Grundsatzschema G10 aufgestellt worden (22a), mit dessen Hilfe die beiden genannten Sätze auseinander ableitbar sind. Für den Vollsatz des genannten λ-Ausdrucks fanden wir einen gleichbedeutenden Satz in der alten Symbolik. Es gibt jedoch zu jenem λ-Ausdruck selbst in der alten Symbolik keinen gleichbedeutenden Ausdruck. Daher ist der neue Ausdruck von großem Nutzen, wenn wir der durch ihn bezeichneten Eigenschaft eine Eigenschaft (zweiter Stufe) zuschreiben wollen, d. h. wenn der λ-Ausdruck als Argumentausdruck zu einem andern Prädikatausdruck der zweiten Stufe verwendet wird.

Der vorhin genannte λ-Ausdruck ist ein einstelliger Prädikatausdruck. In analoger Weise bildet man mehrstellige Prädikatausdrücke mit Hilfe von λ-Operatoren mit mehreren Variablen. Z. B. ist ein λ-Ausdruck von der Form ‚$(\lambda x, y)(\ldots x \ldots y \ldots)$', wo der Operand ‚$\ldots x \ldots y \ldots$' eine Satzformel mit den freien Variablen ‚x' und ‚y' ist, ein zweistelliger Prädikatausdruck, der diejenige Relation bezeichnet, die dann und nur dann zwischen zwei Individuen x und y besteht, wenn sie die im Operanden formulierte Bedingung erfüllen. In analoger Weise bildet man λ-Prädikatausdrücke für mehr als zwei Argumentstellen und für beliebige andere Typen.

Die λ-Ausdrücke sind theoretisch von großer Wichtigkeit, werden aber in Sprache C verhältnismäßig selten verwendet, da hier in vielen Fällen andere Ausdrucksformen zur Bildung von Prädikatausdrücken verfügbar sind. Oft können Funktoren für diesen Zweck verwendet werden. Z. B. kann man die in ‚$Pa \vee (\exists y)\, Rya$' von a ausgesagte Eigenschaft durch ‚$P \vee mem_2(R)$' ausdrücken, so daß hier der umständlichere λ-Ausdruck nicht nötig ist. In manchen Fällen — nämlich dann, wenn von der betreffenden Eigenschaft in einem bestimmten Zusammenhang häufig die Rede ist — empfiehlt es sich, für die Eigenschaft ein einfaches Prädikat durch Definition einzuführen. In dem früheren Beispiel können wir etwa ‚Q' durch folgende Definition einführen: ‚$Q(x) \equiv Px \vee (y)\, Ryx$' und dann die beabsichtigte Aussage über diese Eigenschaft durch ‚$M(Q)$' wiedergeben. Ein λ-Ausdruck ist im allgemeinen nur dann von Nutzen, wenn es sich weder lohnt, ein Prädikat für die gemeinte Eigenschaft zu

definieren, noch Funktoren zu definieren, die gestatten würden, die Eigenschaft durch einen zusammengesetzten Prädikatausdruck zu bezeichnen.

λ-Funktorausdrücke. Wir haben bisher nur λ-Ausdrücke eingeführt, deren Operand eine Satzformel ist; solche Ausdrücke sind Prädikatausdrücke. Nun wollen wir auch λ-Ausdrücke zulassen, deren Operand ein Ausdruck des Typensystems von beliebigem Typus ist. Hier, wie vorhin, soll der Vollausdruck ‚$[(\lambda\, x)\,(..\, x\, ..)]\, a$‘ gleichbedeutend sein mit ‚$..\, a\, ..$‘ (d. h. mit dem Ergebnis der Einsetzung von ‚a‘ für ‚x‘ in dem Operanden); im ersten Fall ist dies ein Satz, im zweiten Fall ein Ausdruck des Typensystems. (Das Grundsatzschema G10 dient auch für die Umformung in diesem Fall.) Da hier der Vollausdruck des λ-Ausdrucks keine Satzformel ist, so ist der λ-Ausdruck nicht ein Prädikatausdruck, sondern ein Funktorausdruck.

Beispiele. 1. Nach dem Gesagten ist ‚$[(\lambda\, x)\,(prod\,(3, x))]\, a$‘ gleichbedeutend mit ‚$prod\,(3, a)$‘, bedeutet also so viel wie „das Dreifache von a“. Daher ist ‚$(\lambda\, x)\,(prod\,(3, x))$‘ ein Funktorausdruck, der so viel bedeutet wie „das Dreifache von“ oder „die Funktion, die für x den Wert $3\, x$ hat“. So sehen wir, daß ein λ-Funktorausdruck ‚$(\lambda\, x)\,(..x..)$‘ allgemein übersetzt werden kann mit „die Funktion, die für x den Wert $..x..$ ergibt“. — 2. ‚$(\lambda\, x)\,[(\exists\, x)\, Rxy]$‘ ist ein einstelliger Prädikatausdruck. Er bedeutet so viel wie „die Klasse derjenigen x, die zu etwas in der Relation R stehen“, ist also (nach D18—1) gleichbedeutend mit ‚$mem_1\,(R)$‘; denn ‚$[(\lambda\, x)\,[(\exists\, y)\, Rxy]]a$‘ ist nach der früheren Erläuterung gleichbedeutend mit ‚$(\exists\, y)\, Ray$‘, also auch mit ‚$mem_1\,(R)\, a$‘. Den genannten λ-Ausdruck nehmen wir nun als Operanden in dem λ-Ausdruck ‚$(\lambda\, H)\,[(\lambda\, x\,[(\exists\, y)\, Hxy]]$‘. Dies ist ein Funktorausdruck; er bedeutet so viel wie „die Funktion, die für H die Klasse derjenigen x ergibt, die zu etwas in der Relation H stehen“ oder „die Funktion, die für H die Klasse der Erstglieder von H ergibt“. Er ist daher gleichbedeutend mit ‚mem_1‘; denn ‚$[(\lambda\, H)\,[(\lambda\, x)\,[(\exists\, y)\, Hxy]]]\,(R)$‘ ist gleichbedeutend mit ‚$(\lambda\, x)\,[(\exists\, y)\, Rxy]$‘, also mit ‚$mem_1\,(R)$‘.

Nach einer früheren Regel (**9a**, (4)) dürfen Klammern weggelassen werden, die einen Ausdruck einschließen, der aus einem Operator und dem zugehörigen Operanden besteht. Demgemäß dürfen im vorhergehenden Absatz („Beispiele“) in den Formeln alle eckigen Klammern weggelassen werden, z. B.: ‚$(\lambda\, H)\,(\lambda\, x)\,(\exists\, y)\,(Hxy)\,(R)$‘. (Regel (5) in **9a** bezieht sich aber nicht auf λ-Ausdrücke.)

33b. Regel für den λ-Operator. Aus den gegebenen Erläuterungen des Sinnes der λ-Ausdrücke geht Folgendes hervor. Folgt auf einen λ-Ausdruck (Prädikatausdruck oder Funktorausdruck), dessen λ-Operator n Variable enthält, ein Argumentausdruck — wir nennen ihn den zu dem λ-Ausdruck (und auch zu dem λ-Operator) zugehörigen Argumentausdruck —, so muß dieser n-stellig sein und jedes seiner n-Glieder muß denselben Typus haben wie die entsprechende Variable im λ-Operator. Der λ-Operator kann in diesem Fall gemäß der untenstehenden λ-Regel eliminiert werden. [Für den Kalkül B folgt diese Regel aus dem Grundsatzschema G10, **22a**. Für das semantische System B führt die Regel stets von einem Ausdruck zu einem damit L-ersetzbaren; dies folgt daraus,

daß die Sätze der Form G10 auf Grund der gegebenen Auswertungsregeln (25) L-wahr sind.]

λ-Regel. Es sei ein Ausdruck von der Form $[(\lambda\, \mathfrak{v}_{k_1}, \mathfrak{v}_{k_2}, .., \mathfrak{v}_{k_n})\, (\mathfrak{A}_i)]$ $(\mathfrak{A}_{l_1}, \mathfrak{A}_{l_2}, .., \mathfrak{A}_{l_n})$ gegeben, wo $\mathfrak{A}_i$ der Operand des λ-Operators ist. Dieser Ausdruck kann, gleichgültig, ob als selbständiger Satz oder als Teil eines andern Satzes, stets umgeformt werden in den Ausdruck $\mathfrak{A}_k$, der entsteht, indem in $\mathfrak{A}_i$ $\mathfrak{A}_{l_1}$ für $\mathfrak{v}_{k_1}$ eingesetzt wird, und zugleich $\mathfrak{A}_{l_2}$ für $\mathfrak{v}_{k_2}$, .. und $\mathfrak{A}_{l_n}$ für $\mathfrak{v}_{k_n}$. Somit kann ein λ-Operator stets eliminiert werden, wenn es einen zugehörigen Argumentausdruck gibt. Besteht ein Ausdruck aus mehreren λ-Operatoren, dem Operanden und mehreren Argumentausdrücken (jeder von diesen ist für sich eingeklammert; ihre Anzahl ist kleiner oder gleich der der λ-Operatoren), so gehört der erste Argumentausdruck zu dem ersten λ-Operator und kann zusammen mit diesem eliminiert werden; der zweite Argumentausdruck gehört zu dem zweiten λ-Operator usf.

Beispiel. Aus ‚$(\lambda\, x_1)\, (\lambda F_2, x_3)\, (\lambda H_4)\, (..x_1..F_2..x_3..H_4..)\, (a_1)\, (P_2, a_3)$‘ entsteht durch zweimalige Anwendung der λ-Regel (das zweite Mal auf zwei Variable) das Folgende: ‚$(\lambda\, H_4)\, (..a_1..\, P_2\, ..a_3..\, H_4..)$‘.

Bemerkungen. Beim Gebrauch von λ-Ausdrücken muß sorgfältig auf die Klammern geachtet werden. Gemäß der vorhin getroffenen Festsetzung darf man z. B. anstatt ‚$[(\lambda\, x)\, (Px)]\, (a)$‘ schreiben: ‚$(\lambda\, x)\, (Px)\, (a)$‘. Dagegen dürfen Klammern, die den Operanden eines λ-Operators einschließen (z. B. die um ‚Px‘ in dem angegebenen Beispiel), im allgemeinen nicht weggelassen werden (sondern nur dann, wenn eine der andern Regeln es gestattet). Demgemäß hat man einen Ausdruck von der Form ‚$(\lambda\, x)\, (..x..)\, (a)$‘ stets als Abkürzung für ‚$[(\lambda\, x)\, (..x..)]\, (a)$‘ zu betrachten, nicht aber für ‚$(\lambda\, x)\, [(..x..)\, (a)]$‘; mit andern Worten: ein Prädikat- oder Funktorausdruck, der zwischen λ-Operator und Argumentausdruck steht, gehört zunächst zu ersterem.

Man beachte den Unterschied zwischen ‚$(\lambda\, x, y)$‘ und ‚$(\lambda\, x)\, (\lambda\, y)$‘. ‚$(\lambda\, x, y)\, (..x..y..)$‘, wo ‚$..x..y..$‘ eine Satzformel ist, ist ein Prädikatausdruck; ‚$(\lambda\, x, y)\, (..x..y..)\, (a, b)$‘ ist nach der λ-Regel umformbar in ‚$..a..b..$‘. Dagegen ist ‚$(\lambda\, x)\, (\lambda\, y)\, (..x..y..)$‘ eine Abkürzung für ‚$(\lambda\, x)\, [(\lambda\, y)\, (..x..y..)]$‘ (gemäß der früheren Festsetzung) und ist daher ein Funktorausdruck. Ein Vollausdruck hiervon ist z. B. ‚$(\lambda\, x)\, (\lambda\, y)\, (..x..y..)\, (a)$‘; dies ist nach der λ-Regel umformbar in ‚$(\lambda\, y)\, (..a..y..)$‘ und ist daher ein Prädikatausdruck. Von diesem bilden wir jetzt einen Vollsatz: ‚$(\lambda\, x)\, (\lambda\, y)\, (..x..y..)\, (a)\, (b)$‘. Dies ist eine Abkürzung für ‚$[(\lambda\, x)\, [(\lambda\, y)\, (..x..y..)]]\, (a)\, (b)$‘. Dieser Satz ist nach der λ-Regel umformbar in ‚$(\lambda\, y)\, (..a..y..)\, (b)$‘, und weiter in ‚$..a..b..$‘.

Die λ-Prädikatausdrücke stehen in Analogie zu den Klassenausdrücken in [P. M.]. Sie sind jedoch hier echte Prädikatausdrücke und werden genau so verwendet wie die Prädikate. Z. B. kann der Ausdruck ‚$(\lambda\, x)\, (Px)$‘ in jedem beliebigen Zusammenhang durch ‚P‘ ersetzt werden und umgekehrt. Über die Entwicklung, die zu dieser Gleichstellung zwischen Prädikatausdrücken und Klassenausdrücken geführt hat, vgl. [Syntax] §§ 37, 38. Diese Entwicklung wurde von Russell begonnen (vgl. [P. M.], Einleitung zu I², Kap. VI; Übersetzung: [Math. Logik]). — Church hat zuerst den λ-Operator für Funktorausdrücke verwendet und ihm eine wesentliche Rolle in seinem System gegeben (The calculi of lambda-conversion, Ann. of Math. Studies, No. 6, Princeton 1941).

L33—1. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr.

+**a.** $(\lambda\, x)\,(Fx) = F$.

b. $(\lambda\, x)\,(Fx)\,(y) \equiv Fy$.

c. $(\lambda\, x, y)\,(Hxy) = H$.

d. $(\lambda\, x, y)\,(Hxy)\,(u, v) \equiv Huv$.

33c. Definitionen durch λ-Ausdrücke. $\mathfrak{a}_i$ sei ein Prädikat oder ein Funktor von beliebigem Typus derart, daß eine Definition für $\mathfrak{a}_i$ in Sprache C formuliert werden kann. Dann gibt es stets einen mit $\mathfrak{a}_i$ gleichbedeutenden λ-Ausdruck $\mathfrak{A}_j$, der nur aus alten Zeichen besteht. Daher kann man, wenn man will, $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{A}_j$ als Definition für $\mathfrak{a}_i$ nehmen. Dies ist eine explizite Definition im engeren Sinn (d. h. eine solche, deren Definiendum nur aus dem zu definierenden Zeichen besteht). Die Definition eines n-stelligen Prädikates $\mathfrak{a}_i$ hat dann anstatt der üblichen Form $\mathfrak{a}_i\,(\mathfrak{v}_{i_1}, .., \mathfrak{v}_{i_n}) \equiv \mathfrak{S}_k$ die Form $\mathfrak{a}_i = (\lambda\, \mathfrak{v}_{i_1}, .., \mathfrak{v}_{i_n})\,(\mathfrak{S}_k)$. Die Definition eines Funktors $\mathfrak{a}_i$ hat anstatt der Form $\mathfrak{a}_i\,(\mathfrak{A}_{j_1})\,(\mathfrak{A}_{j_2})\,..\,(\mathfrak{A}_{j_n}) \equiv \mathfrak{S}_k$, wo $\mathfrak{A}_{j_1}$ bis $\mathfrak{A}_{j_n}$ aus Variablen bestehende Argumentausdrücke sind, die Form $\mathfrak{a}_i = (\lambda\, \mathfrak{A}_{j_1})\,(\lambda\, \mathfrak{A}_{j_2})\,..\,(\lambda\, \mathfrak{A}_{j_n})\,(\mathfrak{S}_k)$. Die beschriebene Form der Definitionen durch λ-Ausdrücke kann zunächst für beliebige zu definierende deskriptive Prädikate und Funktoren verwendet werden, wenn deskriptive Grundzeichen gegeben sind. Ferner gilt dasselbe auch für alle logischen Prädikate und Funktoren, die in **17** bis **19** in Sprache A definiert wurden, und für die, die in diesem Kapitel in Sprache C definiert werden. [Einige Beispiele genügen, um diese Möglichkeit zu zeigen. Anstatt D17—2b können wir folgende Form nehmen: ‚$2_m = (\lambda\, F)\,(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(Fx\,.\,Fy\,.\,x \neq y)$'; D18—1: ‚$mem_1 = (\lambda\, H)\,(\lambda\, x)\,(\exists\, y)\,Hxy$'; D19—1: ‚$Un_1 = (\lambda\, H)\,(u)\,(v)\,(x)\,(\ldots)$'; D19—4: ‚$Corr_n = (\lambda\, K, H_1, H_2)\,(\ldots)$'; D29—1: ‚$I = (\lambda\, x, y)\,(x = y)$'; D31—1: ‚$Sym = (\lambda\, H)\,(H \subset H^{-1})$'; D32—1a: ‚$\Lambda_1 = (\lambda\, x)\,(x \neq x)$'; D32—3a: ‚$sm_1 = (\lambda\, N)\,(\lambda\, x)\,(\exists\, F)\,(N\,(F)\,.\,Fx)$'; D32—5a: ‚$sub_1 = (\lambda\, F)\,(\lambda\, G)\,(G \subset F)$'; D32—8: ‚$init = (\lambda\, H)\,(\lambda\, x)\,(\ldots)$'; D34—2: ‚$str_n = (\lambda\, H_1)\,(\lambda\, H_2)\,(Is_n\,(H_1, H_2))$'; D36—1: ‚$Her = (\lambda\, F, H)\,[(x)\,(y)\,(Fx\,.\,Hxy \supset Fy)]$'; D37—3: ‚$sum = (\lambda\, N_1, N_2)\,(\lambda\, F)\,(\exists\, G_1)\,(\exists\, G_2)\,(\ldots)$'.]

Im Kalkül B sei der Satz ‚$mem_1 = (\lambda\, H)\,(\lambda\, x)\,(\exists\, y)\,(Hxy)$' ($\mathfrak{S}_1$) als Definition für mem_1 aufgestellt. Auf Grund von $\mathfrak{S}_1$ können wir nach dem Lehrsatz der Ersetzung (L24—7) in dem beweisbaren Satz ‚$(H)\,(x)\,[mem_1\,(H)\,(x) \equiv mem_1\,(H)\,(x)]$' das zweite Vorkommen von ‚mem_1' durch den λ-Ausdruck in $\mathfrak{S}_1$ ersetzen. So erhalten wir ‚$(H)\,(x)\,[mem_1\,(H)\,(x) \equiv (\lambda\, H)\,(\lambda\, x)\,[(\exists\, y)\,Hxy]\,(H)\,(x)]$' und hieraus durch zweimalige Anwendung der λ-Regel (mit den trivialen Einsetzungen von ‚H' für ‚H' und ‚x' für ‚x') ‚$(H)\,(x)\,[mem_1\,(H)\,(x) \equiv (\exists\, y)\,Hxy]$'. Daher erhalten wir aus dem Definitionssatz $\mathfrak{S}_1$ in B dieselben Ergebnisse wie aus der offenen Definitionsformel für ‚mem_1' in A (das ist die in der letzten eckigen Klammer stehende Formel).

33d. Die *R* von *b*. Für die Eigenschaft, zu b in der Beziehung R zu stehen — in anderen Worten: für die Klasse der R von b — können wir mit Hilfe des λ-Operators den Prädikatausdruck ‚$(\lambda\, x)\,(Rxb)$‘ bilden; hierfür wollen wir den kürzeren Ausdruck ‚R (—, b)‘ einführen. Ferner schreiben wir für die Klasse der Individuen, zu denen a die Beziehung R hat, anstatt ‚$(\lambda\, y)\,(Ray)$‘ auch kürzer ‚R (a, —)‘. Z. B. bezeichnet ‚Gr (—, 3)‘ die Klasse der Zahlen, die größer als 3 sind; ‚Gr (3, —)‘ die Klasse der Zahlen, die kleiner als 3 sind.

In der Praxis werden wir den Strich ‚—‘ meist nur in Fällen der beiden soeben beschriebenen Arten (die den untenstehenden Lehrsätzen L2 entsprechen) anwenden. Der theoretischen Vollständigkeit wegen wollen wir aber jetzt die allgemeine Regel der Verwendung des Striches angeben. Der Strich soll nur im Argumentausdruck eines Prädikates vorkommen; ein Argumentausdruck darf auch mehrere Striche enthalten. $\mathfrak{A}_i$ sei ein beliebiger Prädikatausdruck, $\mathfrak{A}_j$ sei ein zugehöriger Argumentausdruck, in dem p Argumentstellen ($1 \leqq p \leqq n - 1$) mit Strichen besetzt sind. Dann soll $\mathfrak{A}_i\,(\mathfrak{A}_j)$ gleichbedeutend sein mit dem folgenden λ-Prädikatausdruck und daher in beliebigem Zusammenhang umformbar in diesen Ausdruck: $(\lambda\, \mathfrak{v}_{k_1}, \mathfrak{v}_{k_2}, .., \mathfrak{v}_{k_p})\,[\mathfrak{A}_i\,(\mathfrak{A}_j')]$, wo $\mathfrak{A}_j'$ aus $\mathfrak{A}_j$ gebildet ist, indem die Striche der Reihe nach durch die Variablen des λ-Operators ersetzt werden (der erste Strich durch $\mathfrak{v}_{k_1}$, .., der letzte durch $\mathfrak{v}_{k_p}$). [Der genannte λ-Ausdruck ist natürlich nur dann ein korrekt gebildeter Prädikatausdruck, wenn $\mathfrak{A}_i\,(\mathfrak{A}_j')$ eine Satzformel ist, also wenn die Variablen an den betreffenden Argumentstellen typenmäßig zu $\mathfrak{A}_i$ passen. Als Variable des λ-Operators dürfen beliebige Variable der betreffenden Typen genommen werden, die in $\mathfrak{A}_i\,(\mathfrak{A}_j)$ nicht vorkommen.] Beispiele für die Verwendung zweier Striche in einem dreistelligen Argumentausdruck: ‚T (—, —, c)‘ ist gleichbedeutend mit ‚$(\lambda\, x, y)\,(Txyc)$‘; ‚T (—, c, —)‘ mit ‚$(\lambda\, x, y)\,(Txcy)$‘, ‚T (c, —, —)‘ mit ‚$(\lambda\, x, y)\,(Tcxy)$‘. Dagegen kann ‚$(\lambda\, x, y)\,(Tyxc)$‘ nicht in einen Vollausdruck von ‚T‘ mit Strichen umgeformt werden.

L33—2. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr.

+**a.** H (—, y) $= (\lambda\, x)\,(Hxy)$.

b. (H (—, y)) (x) $\equiv Hxy$.

+**c.** H (x, —) $= (\lambda\, y)\,(Hxy)$.

d. (H (x, —)) (y) $\equiv Hxy$.

Übungen. Man übersetze die folgenden Sätze (a) mit Hilfe von ‚λ‘, (b) mit Hilfe von ‚—‘. 1. „Es gibt 4 Primzahlen, die größer als 10 und kleiner als 20 sind“ (in der Form ‚4 (...)‘, mit ‚Gr‘). — 2. „a ist Mutter von 5 Kindern“ (‚5 (...)‘). — 3. „a hat ebenso viele Brüder wie b“ (mit ‚Is_1‘, D19—5). — 4. „Die Primzahlen größer als 2 sind ungerade.“ — 5. „Die Quadratzahlen größer als 100 haben die Eigenschaft P.“

Aus der angewandten Logik (Teil II) können jetzt die folgenden Systeme in der Sprache C gelesen werden: **43a, 47, 51a.**

34. Äquivalenzklassen, Strukturen, Kardinalzahlen

34a. Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen. Wenn eine Relation *R* transitiv und symmetrisch ist, so nennt man sie eine Äquivalenzrelation. (Die gewöhnlich in der Logik „Äquivalenz" genannte und durch ‚$\equiv$' symbolisierte Relation ist ein Spezialfall dieser Art.) Äquivalenzrelationen sind reflexiv (L31—1d). Das Feld einer Äquivalenzrelation *R* besteht aus elementfremden Klassen, die die folgenden beiden Bedingungen erfüllen: (1) *R* gilt für jedes Paar in einer dieser Klassen; (2) wenn ein Element der Klasse die Relation *R* zu einem Individuum hat, so gehört dieses Individuum auch zu der Klasse. [Dies sieht man leicht in folgender Weise. Wir beginnen mit einem beliebigen *R*-Glied *a*. Wir betrachten die Klasse *P* aller Individuen, zu denen *a* in der Relation *R* steht (bezeichnet mit ‚$R\,(a, —)$' nach **33c**). Wenn *b* und *c* zu dieser Klasse gehören, so daß also *Rab* und *Rac*, so gilt wegen der Symmetrie auch *Rba* und *Rca*, daher wegen der Transitivität auch *Rbc* und *Rcb*. Ferner gelten wegen der Reflexivität *Raa*, *Rbb* usw. Also gilt *R* für jedes Paar in der Klasse *P*. Ferner, wenn *Rbd* gilt, so wegen der Transitivität auch *Rad*; folglich gehört *d* auch zur Klasse *P*. Also erfüllt *P* die genannten Bedingungen (1) und (2). Daß *P* die beiden Bedingungen erfüllt, kann so formuliert werden: ‚$(x)\,(y)\,(Px\,.\,Py \supset Rxy)\,.\,(x)\,(y)\,(Px\,.\,Rxy \supset Py)$' oder kürzer: ‚$(x)\,(y)\,(Px \supset (Py \equiv Rxy))$'.] Die Klassen, die diese Bedingungen erfüllen, nennen wir Äquivalenzklassen in bezug auf *R*:

D34—1. $aequ\,(H) = (\lambda F)\,[(x)\,(y)\,(Fx \supset (Fy \equiv Hxy))]$.

‚*aequ*' ist ein Funktor. ‚$aequ\,(R)$' ist die Klasse der Äquivalenzklassen in bezug auf *R*. Der Satz ‚$aequ\,(R)\,(P)$' besagt, daß *P* eine Äquivalenzklasse in bezug auf *R* ist. D1 definiert den Funktor ‚*aequ*' allgemein für beliebige (zweistellige, homogene) Relationen. In der Praxis wird der Begriff aber gewöhnlich nur auf Äquivalenzrelationen angewendet. Nach D1 ist die leere Klasse auch eine Äquivalenzklasse (L1d); in der Praxis wird hiervon selten Gebrauch gemacht (vgl. jedoch unten die Bemerkungen zu L37—5). Die folgende Diskussion bezieht sich auf nicht-leere Äquivalenzklassen.

R sei eine Relation, die Übereinstimmung oder Gleichheit in einer gewissen Hinsicht bedeutet, z. B. Gleichfarbigkeit. Dann ist *R* offenbar eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen sind die größten Klassen untereinander gleichfarbiger Individuen; jede Äquivalenzklasse entspricht somit einer bestimmten Farbe. Wenn nicht die einzelnen Farben, sondern die Relation der Gleichfarbigkeit als Grundbegriff gegeben ist, so können wir die Farben definieren als die Äquivalenzklassen der Gleichfarbigkeit. Man beachte, daß wir bei der Erläuterung von ‚*aequ*' in Worten die Klassenterminologie nur deshalb gebraucht haben, weil sie üblich ist. Wir hätten ebenso gut „Äquivalenzeigenschaften" wie „Äquivalenzklassen" sagen können: zwei Individuen haben dann und nur dann eine der Äquivalenzeigenschaften in bezug auf eine Äquivalenzrelation *R* gemein, wenn sie in der Relation *R* zueinander stehen. Im obigen Beispiel sind die Farben die Äquivalenzeigenschaften in bezug auf Gleichfarbig-

keit; d. h. sie sind dadurch charakterisiert, daß zwei Individuen dann und nur dann dieselbe Farbe haben, wenn sie gleichfarbig sind.

R sei eine beliebige Äquivalenzrelation. Dann ist es von Interesse, die Äquivalenzklassen in bezug auf *R* zu betrachten, gleichgültig, ob wir bisher die Relation *R* als Übereinstimmung in einer gewissen Hinsicht aufgefaßt haben oder nicht. Die Äquivalenzklassen in bezug auf *R* stellen gewisse Eigenschaften dar, und *R* kann dann nachträglich als Übereinstimmung in einer Eigenschaft dieser Art aufgefaßt werden. *R* sei z. B. die Relation der Parallelität zwischen Geraden einer festen Ebene. *R* ist eine Äquivalenzrelation. Wir definieren nun die Äquivalenzklassen in bezug auf *R*, also die größten Klassen unter einander paralleler Geraden. Diese Klassen repräsentieren Eigenschaften von Geraden, die wir etwa „Richtungen" nennen können; sie sind dadurch charakterisiert, daß zwei Gerade dann und nur dann dieselbe Richtung haben, wenn sie parallel sind. Parallelität ist nun dasselbe wie Übereinstimmung in der Richtung. Aber wir hatten nicht zuerst den Begriff der Richtung und definierten Parallelität als Übereinstimmung in der Richtung, sondern wir gingen von der Relation der Parallelität aus und definierten die Richtungen als Äquivalenzklassen in bezug auf Parallelität. Eine Definition einer Art von Eigenschaften durch die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation wird zuweilen Definition durch Abstraktion genannt (vgl. RUSSELL [Principles] 166; FREGE [Grundlagen] 73ff.; H. SCHOLZ und H. SCHWEITZER, Die sogenannten Definitionen durch Abstraktion, Forschungen zur Logistik, Heft 3, 1935).

L34—1. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr.

a. $Trans(H) \,.\, Sym(H) \supset (x)(y)[Hxy \equiv (\exists F)(aequ(H)(F) \,.\, Fx \,.\, Fy)]$. Eine gegebene Äquivalenzrelation gilt dann und nur dann zwischen zwei Individuen, wenn sie zu derselben Äquivalenzklasse gehören.

b. $Trans(H) \,.\, Sym(H) \supset (x)(aequ(H)(H(—, x)))$.
Wenn *R* eine Äquivalenzrelation ist, so ist $R(—, a)$ (dasselbe wie $R(a, —)$) eine Äquivalenzklasse. [Es ist nicht nötig zu fordern, daß *a* ein Glied von *R* ist, wegen (d).]

c. $Trans(H) \,.\, Sym(H) \,.\, aequ(H)(F) \,.\, aequ(H)(G) \,.\, F \neq G \supset 0(F \,.\, G)$. Verschiedene Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation haben kein Element gemein.

d. $aequ(H)(\Lambda_1)$.
Die leere Klasse ist eine Äquivalenzklasse in bezug auf jede Relation.

34b. Strukturen. Wir haben früher den Begriff der Isomorphie definiert (‚Is_n', D19—5, für ‚*n*' ist ein Zahlzeichen ‚1', ‚2' usw. zu setzen). Zwei *n*-stellige Relationen sind isomorph, wenn es eine zweistellige Relation gibt, die ein Korrelator zwischen den beiden Relationen ist. Wenn *R* ein Korrelator zwischen S_1 und S_2 ist, so ist die Konverse von *R* ein Korrelator zwischen S_2 und S_1; folglich ist Isomorphie eine symme-

trische Relation. Und wenn R_1 ein Korrelator zwischen S_1 und S_2 ist und R_2 ein Korrelator zwischen S_2 und S_3, so ist $R_1 \mid R_2$ ein Korrelator zwischen S_1 und S_3; folglich ist Isomorphie transitiv. Also ist Isomorphie eine Äquivalenzrelation und total-reflexiv:

+**L34—2.** Die folgenden Sätze sind L-wahr:

a. $Sym\,(Is_n)$.
b. $Trans\,(Is_n)$.
c. $Reflex\,(Is_n)$. (Aus (a), (b), L31—1d und c.)

Wenn zwei Relationen isomorph sind, so wollen wir auch sagen, sie haben dieselbe Struktur. Daher können wir die Strukturen von Relationen als die Äquivalenzklassen (oder -eigenschaften) in bezug auf Isomorphie darstellen. Gemäß den früheren Überlegungen ist dann die Struktur einer Relation die Klasse der mit ihr isomorphen Relationen (oder die Eigenschaft, mit ihr isomorph zu sein). Wir schreiben für „die Struktur der (n-stelligen) Relation T" ‚$str_n\,(T)$' mit einem Funktor ‚str_n':

D34—2. $str_n\,(H) = Is_n\,(—, H)$.

Daß M eine Struktur n-stelliger Relationen ist — wir nennen sie auch eine n-stellige Struktur —, drücken wir symbolisch aus durch ‚$Str_n\,(M)$'. ‚Str_n' ist ein Prädikat dritter Stufe.

D34—3. $Str_n = aequ\,(Is_n)$.

D2 und D3 sind (wie D19—5) Definitionsschemata. Wenn wir für ‚n' ‚1', ‚2' usw. einsetzen, so erhalten wir eigentliche Definitionen für die Funktoren ‚str_1', ‚str_2' usw. und die Prädikate ‚Str_1', ‚Str_2' usw. Analoges gilt für die in den Lehrsätzen genannten Formeln.

L34—3. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr. Für ‚n' ist ein Zahlzeichen ‚1', ‚2' usw. einzusetzen.

a. $str_n\,(H)\,(K) \equiv Is_n\,(K, H)$.
Eine Relation besitzt die Struktur einer andern dann und nur dann, wenn sie mit der andern isomorph ist.

b. $Str_n\,(str_n\,(H))$.
Für jede n-stellige Relation H gilt: $str_n\,(H)$, d. h. die Struktur von H, ist ein Element der Klasse Str_n, d. h. eine n-stellige Struktur.

+**c.** $Str_n\,(N) \equiv (H)\,(K)\,[N\,(H) \supset (N\,(K) \equiv Is_n\,(H, K))]$.
(Aus D1.)

d. $Str_n\,(N) \supset (H)\,(K)\,[N\,(H) \,.\, N\,(K) \supset Is_n\,(H, K)]$. (Aus (c).)

e. $Str_n\,(N) \supset (H)\,(K)\,[N\,(H) \,.\, Is_n\,(H, K) \supset N\,(K)]$. (Aus (c); (d) und (e) entsprechen den Bedingungen (1) und (2) in **34a**.)

f. $Str_n\,(\Lambda_1)$.
Die leere Klasse von n-stelligen Relationen ist eine n-stellige Struktur. (Aus L1d.)

34c. Kardinalzahlen. Wie früher schon erwähnt (**19**), bedeutet einstellige Isomorphie von Klassen oder Eigenschaften so viel wie Gleichzahligkeit. Die einstelligen Strukturen sind daher die Kardinalzahlen. Angenommen, es gebe genau 3 Individuen mit der Eigenschaft P; diese Tatsache kann durch den Satz ‚$3\,(P)$' ausgesagt werden (**17**c). Aus der Definition von ‚3' folgt, daß eine Eigenschaft die Eigenschaft (zweiter Stufe) 3 dann und nur dann hat, wenn sie mit P isomorph ist. Also gilt ‚$3 = str_1\,(P)$' (L3a), und daher ‚$Str_1\,(3)$'; d. h., 3 ist die Kardinalzahl von P, und daher ist 3 eine Kardinalzahl. Analoges gilt für jedes andere gemäß D17—3 definierte Prädikat zweiter Stufe. Somit gelten die folgenden Lehrsätze.

L34—4. ‚M' sei irgend eines der gemäß D17—3 definierten Prädikate zweiter Stufe ‚0', ‚1', ‚2' usw. Dann sind die folgenden Satzformeln L-wahr.

a. $M\,(F)\,.\,M\,(G) \supset Is_1\,(F, G)$.
b. $M\,(F)\,.\,Is_1\,(F, G) \supset M\,(G)$.
c. $M\,(F) \supset (M\,(G) \equiv Is_1\,(F, G))$. (Aus (a), (b).)
d. $aequ\,(Is_1)\,(M)$. (Aus (c), D1.)
+**e.** $Str_1\,(M)$. (Aus (d), D3.)
f. $M\,(F) \supset M = Is_1\,(—, F)$. (Aus (c).)
g. $M\,(F) \supset M = str_1\,(F)$. (Aus (f), D2.)

Wir haben die Eigenschaften zweiter Stufe 0, 1 usw. schon früher Kardinalzahlen genannt (**17**c). Erst jetzt, nach Definition des allgemeinen Begriffes der Kardinalzahl (‚Str_1'), haben wir zeigen können, daß sie tatsächlich Kardinalzahlen sind (L4e).

Die leere Klasse, und nur diese, hat die Kardinalzahl 0 (L5b, c, d). Daher ist 0 nicht selbst leer (L5e). Man beachte den Unterschied zwischen dem untenstehenden L5e und L32—1a. Es ist wichtig, den Unterschied zwischen der leeren Klasse (erster Stufe) Λ_1 und der (nicht-leeren) Klasse 0 (zweiter Stufe) deutlich zu beachten (zumal da in der Mengenlehre die leere Klasse unglücklicherweise häufig mit ‚0' bezeichnet wird).

L34—5. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr.

+**a.** $0\,(F) \equiv \sim \exists\,(F)$.
+**b.** $0\,(\Lambda_1)$.
c. $0\,(F) \equiv (F = \Lambda_1)$.
d. $0 = \{\Lambda_1\}$. (Aus (c).)
e. $\exists\,(0)$. (Aus (b).)
f. $1\,(F) \equiv (\exists\, x)\,(y)\,(Fy \equiv (y = x))$.
g. $1\,(F) \equiv (\exists\, x)\,(F = \{x\})$.
h. $2\,(F) \equiv (\exists\, x)\,(\exists\, y)\,[Jxy\,.\,(F = \{x; y\})]$.
i. $3\,(F) \equiv (\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(\exists\, z)\,[J_3xyz\,.\,(F = \{x; y; z\})]$.
j. $1\,\{x\}$.
k. $2\,\{x; y\} \equiv Jxy$.
l. $3\,\{x; y; z\} \equiv J_3xyz$.

Beispiele für zweistellige Strukturen werden wir später kennenlernen: ‚*Prog*' (D37—1), ‚η' und ‚ϑ' (38).

FREGE hat zuerst deutlich darauf hingewiesen, daß die Anzahlen oder Kardinalzahlen nicht den Individuen, sondern den Eigenschaften (oder Klassen) zuzuschreiben sind. Er hat Definitionen für die einzelnen Kardinalzahlen und für den Begriff der Kardinalzahl aufgestellt, mit denen unsere Definitionen (in **17c** und D3 für ‚Str_1') im wesentlichen übereinstimmen (FREGE [Grundlagen] 79ff., [Grundgesetze] Band I, 57). RUSSELL hat 1901 unabhängig von FREGE ganz entsprechende Definitionen aufgestellt und zur Grundlegung der Arithmetik verwendet. FREGE und RUSSELL hielten es aber beide für notwendig, verschiedene Ausdrucksformen für Klassen und für Eigenschaften zu verwenden, und beide definierten die Kardinalzahlen als Klassen von Klassen. Dabei ist z. B. die Kardinalzahl 3 die Klasse aller Tripel von Individuen. Es ist verständlich, daß diese Auffassung häufig Bedenken hervorrief, zumal da man gewohnheitsgemäß die Klassen als Gesamtheiten betrachtete; die Gesamtheit der Tripel etwa aller physischen Dinge in der Welt ist ja tatsächlich eine recht vage und uferlose Sache. (Bedenken dieser Art finden sich z. B. bei HAUSDORFF [Grundzüge] 46 und J. KÖNIG [Logik] 226 Anmerkung; zu ihrer Diskussion vgl. FRAENKEL [Einleitung] 57ff.) Wenn man aber ein Klassenzeichen auffaßt als ein Zeichen, mit dessen Hilfe man Aussagen über das den Elementen der Klasse Gemeinsame machen kann, so verschwindet der Anschein des Paradoxen in FREGES und RUSSELLS Definition (vgl. CARNAP [Aufbau] 54f.). Und wenn wir, wie es im vorstehenden geschehen ist, die Kardinalzahlen als Eigenschaften von Eigenschaften einführen, z. B. ‚3' als ein Prädikat zur Bezeichnung der Eigenschaft, ein Tripel zu sein, so fallen die früheren Einwände ganz fort. Ebenso wird dann auch die Kritik hinfällig, die WITTGENSTEIN und WAISMANN an FREGES und RUSSELLS Definitionen geübt haben (vgl. WAISMANN [Math. Denken] § 9 B).

34d. Strukturelle Eigenschaften. Ist eine Relation R symmetrisch, so ist, wie sich leicht zeigen läßt, auch jede andere Relation, die dieselbe Struktur hat wie R, symmetrisch. In Symbolen: ‚$(H_1)\,(H_2)\,[Sym\,(H_1)\,.\,Is_2\,(H_2, H_1) \supset Sym\,(H_2)]$'. (Später (vgl. **36a**) werden wir dies so ausdrücken: „Die Symmetrie ist eine erbliche Eigenschaft in bezug auf die Isomorphie", in Symbolen: ‚$Her\,(Sym, Is_2)$'.) Die Eigenschaft, symmetrisch zu sein, hängt also nur von der Struktur der Relation ab; wir wollen sie deshalb eine strukturelle Eigenschaft nennen; in Symbolen: ‚$Struct_2\,(Sym)$'. Allgemein nennen wir eine Eigenschaft von n-stelligen Relationen eine (n-stellige) s t r u k t u r e l l e E i g e n s c h a f t, wenn sie in dem erläuterten Sinn nur von der Struktur abhängt, d. h. wenn sie beim Übergang von einer Relation zu einer isomorphen stets erhalten bleibt.

D34—4. $Struct_n\,(N) \equiv (H_1)\,(H_2)\,[N\,(H_1)\,.\,Is_n\,(H_1, H_2) \supset N\,(H_2)]$.

L34—6. Die folgenden Sätze sind L-wahr.

+ **a.** $Struct_2\,(Sym)$.

Dasselbe gilt für die übrigen in **31** definierten Prädikate: ‚*As*', ‚*Trans*', ‚*Intr*', ‚*Refl*', ‚*Irr*', ‚*Reflex*', ‚*Connex*', ‚*Ser*', ‚Un_1', ‚Un_2', $Un_{1,\,2}$'.

b. $Str_n \subset Struct_n$. (Aus L34—3e.)

L6b besagt, daß die Strukturen auch strukturelle Eigenschaften sind. Sie sind in der Tat die stärksten strukturellen Eigenschaften in folgendem Sinn. $\mathfrak{S}_i$ sei ein Satz, der einer gegebenen n-stelligen Relation eine bestimmte Struktur zuschreibt; $\mathfrak{S}_j$ sei ein Satz, der derselben Relation eine beliebige strukturelle Eigenschaft zuschreibt. Dann L-impliziert $\mathfrak{S}_i$ entweder $\mathfrak{S}_j$ oder $\sim \mathfrak{S}_j$. Durch die Zuschreibung einer Struktur ist somit eine Relation in bezug auf ihre strukturellen Eigenschaften vollständig beschrieben. Die meisten strukturellen Eigenschaften, darunter die in L6a genannten, sind aber nicht Strukturen, da sie die Bedingung L34—3d nicht erfüllen.

35. Kennzeichnungen von Individuen

35a. Kennzeichnungen. In diesem Paragraphen werden gewisse Ausdrücke erläutert, hauptsächlich weil sie im System der [P. M.] und einigen andern Systemen häufig vorkommen. In unserer Sprache C werden jedoch Ausdrücke dieser Art selten verwendet werden.

Unsere Aufgabe ist die Explikation von Phrasen, wie „der Sohn von Karl Schmidt", „das Buch auf meinem Schreibtisch". Der Satz „Das Buch auf meinem Schreibtisch ist schwarz" besagt zweierlei: (1) „Es liegt genau ein Buch auf meinem Schreibtisch", (2) „Dieses ist schwarz". Bezeichnet ‚P' die Eigenschaft, ein Buch auf meinem Schreibtisch zu sein, und ‚Q' die Eigenschaft, schwarz zu sein, so wollen wir für „das Buch auf meinem Schreibtisch" in Symbolen schreiben: ‚$(\iota\, x)\,(Px)$', und für den ganzen Satz: ‚$Q\,[(\iota\, x)\,(Px)]$'. Hier können die eckigen Klammern gemäß Regel (4) in **9a** weggelassen werden, dagegen nicht die Klammern um ‚Px'. Aus ‚$(x)\,[Px \equiv (x = a)]$' ($\mathfrak{S}_1$) folgt einerseits ‚$(x)\,[x = a \supset Px]$', hieraus ‚$a = a \supset Pa$' und daher ‚Pa'; anderseits ‚$(x)\,[Px \supset (x = a)]$' und daraus ‚$(x)\,[x \neq a \supset \sim Px]$'. Somit besagt $\mathfrak{S}_1$ soviel wie „a hat die Eigenschaft P und jedes andere Individuum hat sie nicht", also „a ist das einzige Individuum, das die Eigenschaft P hat". Die obige Teilbehauptung (1) — sie wird auch Einzigkeitsbedingung genannt — kann daher durch ‚$(\exists\, y)\,(x)\,[Px \equiv (x = y)]$' formuliert werden. Als Abkürzung kann natürlich ‚$1\,(P)$' geschrieben werden (das mit dem eben genannten Satz L-äquivalent ist, s. L34—5f). Daher kann der ganze ursprüngliche Satz so formuliert werden: ‚$(\exists\, y)\,[(x)\,(Px \equiv (x = y))\,.\,Qy]$'.

Ein Ausdruck von der Form ‚$(\iota\, x)\,(\ldots x \ldots)$' bezeichnet ein Individuum, aber nicht wie ein Eigenname, z. B. ‚a', ‚b' oder dergleichen, sondern mit Hilfe einer Eigenschaft, die nur diesem Individuum zukommt. Ein solcher Ausdruck heißt eine (individuelle) Kennzeichnung. ‚$(\iota\, x)$' ist ein Operator (und zwar ein ι-Operator, sprich „Iota-Operator"; ‚ι' ist ein umgekehrtes griechisches Iota); also ist x an allen Stellen in der Kennzeichnung ‚$(\iota\, x)\,(\ldots x \ldots)$' gebunden. Damit die Regeln für die Verwendung von Kennzeichnungen nicht zu kompliziert werden, wollen wir eine Kennzeichnung nur als Argumentausdruck zu einem Prädikatausdruck (nicht zu einem Funktorausdruck) und als Glied in einer Identi-

tätsformel zulassen. Auf Grund der gegebenen Erläuterung stellen wir die folgenden drei Formelschemata auf:

D35—1. a. $\mathfrak{A}_k \equiv (\exists\, \mathfrak{v}_j)\, [(\mathfrak{v}_i)\, (\mathfrak{A}_i \equiv (\mathfrak{v}_i = \mathfrak{v}_j)) \,.\, \mathfrak{A}_j]$.

Hier sind $\mathfrak{v}_i$ und $\mathfrak{v}_j$ zwei verschiedene Individualvariable; $\mathfrak{A}_i$ ist eine beliebige Satzformel, in der $\mathfrak{v}_j$ nicht frei vorkommt; $\mathfrak{A}_k$ ist ein Vollausdruck eines Prädikatausdrucks derart, daß an einer der Argumentstellen die Kennzeichnung $(\iota\, \mathfrak{v}_i)\, (\mathfrak{A}_i)$ steht; $\mathfrak{A}_j$ ist aus $\mathfrak{A}_k$ gebildet, indem die genannte Kennzeichnung an der betreffenden Stelle durch $\mathfrak{v}_j$ ersetzt wird.

b. $[(\iota\, \mathfrak{v}_i)\, (\mathfrak{A}_i) = \mathfrak{A}_j] \equiv (\mathfrak{v}_i)\, (\mathfrak{A}_i \equiv (\mathfrak{v}_i = \mathfrak{A}_j))$.

Hier ist $\mathfrak{v}_i$ eine Individualvariable, $\mathfrak{A}_i$ eine Satzformel, und $\mathfrak{A}_j$ ein Individualausdruck (aber nicht eine Kennzeichnung), in dem $\mathfrak{v}_i$ nicht frei vorkommt.

c. $[(\iota\, \mathfrak{v}_i)\, (\mathfrak{A}_i) = (\iota\, \mathfrak{v}_j)\, (\mathfrak{A}_j)] \equiv (\exists\, \mathfrak{v}_l)\, [(\mathfrak{v}_i)\, (\mathfrak{A}_i \equiv (\mathfrak{v}_i = \mathfrak{v}_l)) \,.\, (\mathfrak{v}_j)\, (\mathfrak{A}_j \equiv (\mathfrak{v}_j = \mathfrak{v}_l))]$.

Hier sind $\mathfrak{v}_i$, $\mathfrak{v}_j$ und $\mathfrak{v}_l$ Individualvariable ($\mathfrak{v}_l$ verschieden von $\mathfrak{v}_i$ und $\mathfrak{v}_j$); $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}_j$ sind Satzformeln, in denen $\mathfrak{v}_l$ nicht frei vorkommt.

Diese Formeln haben zwar nicht die sonst in Sprache C verwendete Form von Definitionen. Sie dienen aber demselben Zweck wie Definitionen; sie können nämlich zur Eliminierung von Kennzeichnungen in beliebigen Zusammenhängen der oben angegebenen Formen verwendet werden. Formeln der Art D1a sind anwendbar in allen Fällen, in denen eine Kennzeichnung als Argumentausdruck zu einem Prädikatausdruck vorkommt. Ein Beispiel einer solchen Formel ist ‚$Q\, (\iota\, x)\, (Px) \equiv (\exists\, y)\, [(x)\, (Px \equiv (x = y)) \,.\, Q\, y]$'. Mit Hilfe dieser Formel kann z. B. ‚$Q\, (\iota\, x)\, (Px)$' nicht nur als selbständiger Satz, sondern auch als Teilsatz in beliebigem Zusammenhang durch ‚$(\exists\, y)\, [(x)\, (Px \equiv (x = y)) \,.\, Qy]$' ersetzt werden, in Übereinstimmung mit den früher gegebenen Erläuterungen. Die Formeln D1b sind anwendbar, wenn nur ein Glied einer Identitätsformel die Form einer Kennzeichnung hat. Hier kann z. B. ‚$(\iota\, x)\, (Px) = a$' ersetzt werden durch ‚$(x)\, (Px \equiv (x = a))$'. Ist ‚$a = (\iota\, x)\, (Px)$' gegeben, so wird es zunächst in ‚$(\iota\, x)\, (Px) = a$' umgeformt und dann in die genannte Formel. Die Formeln D1c sind anwendbar, wenn beide Glieder einer Identitätsformel Kennzeichnungen sind. Hiernach ist z. B. ‚$(\iota\, x)\, (Px) = (\iota\, y)\, (Qy)$' umformbar in ‚$(\exists\, z)\, [(x)\, (Px \equiv (x = z)) \,.\, (y)\, (Qy \equiv (y = z))]$'. Kommen mehrere Kennzeichnungen in einem Satz vor, so ist es unwesentlich, welche von ihnen zuerst mit Hilfe von D1 eliminiert wird, d. h. Eliminationen in verschiedenen Reihenfolgen führen zu L-äquivalenten Ergebnissen.

Während die Sätze ‚$\sim (Qa)$' und ‚$(\sim Q)\, a$' gleichbedeutend und L-äquivalent sind (D28—1a), gilt das Entsprechende nicht, wenn an der Stelle der Individualkonstanten eine Kennzeichnung steht. Nach dem untenstehenden Lehrsatz L1b ist z. B. ‚$\sim Q\, (\iota\, x)\, (Px)$' L-äquivalent mit

,$\sim [1(P) \,.\, (P \subset Q)]$' und daher mit ,$\sim 1(P) \vee \sim (P \subset Q)$' ($\mathfrak{S}_1$); dagegen ist ,$(\sim Q)\,(\imath\, x)\,(Px)$' nach demselben Lehrsatz L-äquivalent mit ,$1(P) \,.\, (P \subset \sim Q)$' ($\mathfrak{S}_2$). Ist die Einzigkeitsbedingung ,$1(P)$' nicht erfüllt, d. h. gibt es entweder kein oder mehrere Individuen mit der Eigenschaft P, so ist $\mathfrak{S}_1$ wahr, aber $\mathfrak{S}_2$ falsch. Daher müssen die Kennzeichnungen anders behandelt werden als die sonstigen Individualausdrücke. So darf eine Kennzeichnung nicht ohne weiteres für eine Individualvariable eingesetzt werden. Es kann z. B. ,$(y)\,(Qy)$' wahr sein (nämlich wenn alle Individuen die Eigenschaft Q haben), trotzdem aber ,$Q\,(\imath\, x)\,(Px)$' falsch, nämlich wenn die Einzigkeitsbedingung ,$1(P)$' nicht erfüllt ist. Daher ist ,$Q\,(\imath\, x)\,(Px)$' nicht von ,$(y)\,(Qy)$' allein L-impliziert, sondern nur von diesem zusammen mit ,$1(P)$' (L1c). Das Operieren mit Kennzeichnungen erfordert somit besondere Vorsicht; daher ist es besser, sie zu vermeiden, wenn dies ohne besondere Komplikationen möglich ist.

L35—1. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr.

+**a.** $G\,(\imath\, x)\,(Fx) \equiv (\exists\, y)\,[(x)\,(Fx \equiv (x = y)) \,.\, Gy]$. (Aus D1a.)
b. $G\,(\imath\, x)\,(Fx) \equiv 1(F) \,.\, (F \subset G)$.
c. $(y)\,(Gy) \,.\, 1(F) \supset G\,(\imath\, x)\,(Fx)$. (Aus (b).)
d. $G\,(\imath\, x)\,(Fx) \equiv 1(F) \,.\, \exists\,(F \,.\, G)$.
e. $F\,(\imath\, x)\,(Fx) \equiv 1(F)$.
f. $((\imath\, x)\,(Fx) = y) \equiv (x)\,(Fx \equiv (x = y))$. (Aus D1b.)
+**g.** $((\imath\, x)\,(Fx) = y) \equiv 1\,(F) \,.\, Fy$.
h. $((\imath\, x)\,(Fx) = y) \equiv (F = \{y\})$.
i. $[(\imath\, x)\,(Fx) = (\imath\, y)\,(Gy)] \equiv (\exists\, z)\,[(x)\,(Fx \equiv (x = z)) \,.\, (y)\,(Gy \equiv (y = z))]$. (Aus D1c.)
j. $[(\imath\, x)\,(Fx) = (\imath\, y)\,(Gy)] \equiv 1(F) \,.\, 1(G) \,.\, \exists\,(F \,.\, G)$.
k. $[(\imath\, x)\,(Fx) = (\imath\, y)\,(Gy)] \equiv 1(F) \,.\, (G \subset F) \,.\, \exists\,(G)$.
l. $[(\imath\, x)\,(Fx) = (\imath\, y)\,(Gy)] \equiv 1(F) \,.\, (F = G)$.

35b. Relationale Kennzeichnungen. Kennzeichnungen haben häufig die Form ,$(\imath\, x)\,(Rxb)$'; dies bedeutet: „dasjenige Individuum, das in der Relation R zu b steht". Hierfür verwendet man die Abkürzung ,R'b'. An der Stelle von ,R' kann irgend ein zweistelliger Prädikatausdruck erster Stufe stehen, an der Stelle von ,b' irgend ein Individualausdruck. Ausdrücke dieser Form nennt man relationale Kennzeichnungen. Für sie gelten natürlich dieselben Beschränkungen wie für Kennzeichnungen mit $\imath$-Operatoren.

D35—2. H'$y = (\imath\, x)\,(Hxy)$.

L35—2. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr.

a. $G\,(H$'$y) \equiv (\exists\, z)\,[(x)\,(Hxy \equiv (x = z)) \,.\, Gz]$. (Aus L1a.)
b. $G\,(H$'$y) \equiv 1(H(—, y)) \,.\, (H(—, y) \subset G)$. (Aus L1b.)
c. $Un_1\,(H) \,.\, mem_2\,(H)\,y \supset 1(H\,(—, y))$.
d. $Un_1\,(H) \,.\, mem_2\,(H)\,y \,.\, U\,(G) \supset G\,(H$'$y)$. (Aus (c), L1c.)

In Sprache C werden Kennzeichnungen nur selten gebraucht. Sie können häufig durch die Verwendung von Funktoren vermieden werden, wenn die

früher angegebenen Bedingungen für den Gebrauch von Funktoren (**18b**) erfüllt sind. Kennzeichnungen für Eigenschaften oder Relationen irgend welcher Stufen können immer vermieden werden; sie werden etwa ersetzt durch Vollausdrücke von Funktorausdrücken, Verknüpfungen von Prädikatausdrücken, λ-Ausdrücke oder Ausdrücke mit ‚—'. So treten z. B. an die Stelle der folgenden Ausdrücke aus [P. M.]: ‚D'R', ‚C'R', ‚cnv'R', ‚s'$\varkappa$', ‚p'$\varkappa$', ‚Cl'$\varkappa$', ‚Rl'$\varkappa$', ‚$\vec{R}$'b', ‚$\overleftarrow{R}$'a', ‚Nc'α', ‚Nr'R', in Sprache C die entsprechenden Ausdrücke: ‚$mem_1(R)$', ‚$mem(R)$', ‚R^{-1}', ‚$sm_1(M)$', ‚$pr_1(M)$', ‚$sub_1(M)$', ‚$sub_2(M)$', ‚R (—, b)', ‚R (a, —)', ‚$str_1(P)$', ‚$str_2(R)$'.

Angenommen, die Einzigkeitsbedingung für eine gegebene Kennzeichnung ist entweder rein logisch oder innerhalb eines bestimmten Axiomensystems nachweisbar. Dann kann innerhalb dieses Systems diese Kennzeichnung wie eine Individualkonstante gehandhabt werden. Sie kann z. B. auch (im Unterschied zu unserer früheren Festsetzung) als Argumentausdruck zu einem Funktor zugelassen werden. Ferner kann man auch eine Individualkonstante als Abkürzung für sie verwenden. Mit andern Worten, man kann die Zulassungsbedingungen für Definitionen in folgender Weise erweitern: die Aufstellung einer Definition von der Form $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{A}_j$ ist gestattet, wo das definierte Zeichen $\mathfrak{a}_i$ eine neue Individualkonstante ist und $\mathfrak{A}_j$ eine Kennzeichnung ist, deren Einzigkeitsbedingung beweisbar ist. Solche Definitionen durch Kennzeichnung sind oft bequem (vgl. als Beispiel **43b**, Bemerkung zu Axiom 10*); ihre Zulassung hat aber den Nachteil, daß die Formregeln für Definitionen von den Umformungsregeln abhängig werden.

Übungen. Man übersetze folgende Sätze, womöglich unter Verwendung von relationalen Kennzeichnungen. 1. „Der Bruder von a ist ein Student." — 2. „Der Vater von a ist ein Freund des Vaters von b." — 3. „Der Nachfolger von x ist stets größer als x" (a) mit dem zweistelligen Prädikat ‚Nf' für „Nachfolger", (b) mit dem Funktor ‚nf'. — 4. „Der Vorgänger von x ist stets kleiner als x"; kann hier (wie in (3)) die Kennzeichnung durch Verwendung eines Funktors vermieden werden (vgl. **18b**)? — 5. „Diejenige Zahl, die Primzahl und gerade ist, ist Vorgänger einer Primzahl", mit Hilfe des $\imath$-Operators.

Aus der angewandten Logik (Teil II) können jetzt die folgenden Systeme in Sprache C gelesen werden: **43b**, **52a**, **b** und **53a**.

36. Erblichkeit und Relationsketten

36a. Erblichkeit. Eine Eigenschaft (z. B. eine Krankheitsdisposition, ein Besitzrecht oder dergleichen), die sich von einem Menschen stets oder wenigstens häufig auf seine Kinder überträgt, pflegt man erblich zu nennen. In Analogie dazu wollen wir sagen, die Eigenschaft P sei erblich in bezug auf die Relation R, in Zeichen ‚$Her(P, R)$', wenn sie, sobald sie einem R-Glied zukommt, stets auch allen andern zukommt, zu denen das erste in der Relation R steht.

D36—1. $Her(F, H) \equiv (x)(y)(Fx \,.\, Hxy \supset Fy)$.

Beispiele. Die Eigenschaft, größer als 5 zu sein, ist erblich in bezug auf die Vorgängerrelation in der Reihe der natürlichen Zahlen. Die strukturellen Eigenschaften von Relationen (D34—4) sind diejenigen, die erblich sind in bezug auf Isomorphie.

36b. Relationsketten. ‚$Vf(a, b)$' heiße „a ist ein Vorfahre von b". Wie können wir ‚Vf' mit Hilfe von ‚Elt' definieren? Ungenau formuliert: ‚$Vf(a, b)$' besagt soviel wie ‚$Elt(a, b) \vee Elt^2(a, b) \vee Elt^3(a, b) \vee$ usw.'; mit andern Worten, die Relation Vf besteht, wenn irgend eine endliche

Potenz von *Elt* besteht. Das Problem ist, dieses „usw.“ oder „endlich“ zu explizieren. Wir haben bisher noch keinen Begriff der endlichen Zahl definiert; wir werden ihn vielmehr später mit Hilfe der jetzt einzuführenden Relationsketten definieren. Die Definition gelingt mit Hilfe des Begriffs der erblichen Eigenschaft. ‚$Vf'(a, b)$‘ besage: „a ist Vorfahre von b oder identisch mit b“. Man kann sich leicht klar machen, daß ‚$Vf'(a, b)$‘ dann und nur dann gilt, wenn a ein *Elt*-Glied ist und b alle *Elt*-erblichen Eigenschaften hat, die x hat.

Die folgenden beiden Überlegungen zusammen führen zu diesem Ergebnis. 1. Wenn $Vf'(a, b)$ gilt, so gibt es eine gewisse Zahl n ($n \geqq 0$) derart, daß man durch n *Elt*-Schritte von a nach b gelangen kann: durch 1 Schritt gelangt man zu den Kindern von a, durch 2 Schritte zu den Enkeln usf. Durch n-malige Anwendung des Satzes, daß eine gewisse Eigenschaft P *Elt*-erblich ist, gelangt man daher von der Annahme, daß a die Eigenschaft P hat, zu dem Resultat, daß auch b sie hat. 2. Angenommen, b besitze alle *Elt*-erblichen Eigenschaften von a, und a sei ein *Elt*-Glied. Wenn a ein Vorfahre von x oder identisch mit x ist und x ein Elter von y ist, so ist offenbar a auch ein Vorfahre von y; also ist die Eigenschaft von x, daß a in der Beziehung Vf' zu x steht, *Elt*-erblich; ferner ist es eine Eigenschaft von a. Also ist es nach Voraussetzung auch eine Eigenschaft von b, d. h. es gilt $Vf'(a, b)$.

Ist ‚Vf'‘ definiert, so können wir ‚Vf‘ definieren durch ‚$Elt \mid Vf'$‘. Die Relation, die sich zu irgend einer Relation R so verhält wie Vf' bzw. Vf zu *Elt*, wollen wir die R-**Kette erster** bzw. **zweiter Art** oder auch die Vorfahrenrelation von R nennen; wir bezeichnen sie mit ‚$R^{\geqq 0}$‘ bzw. ‚$R^{>0}$‘. [Symbole in [P. M.]: ‚R_*‘ bzw. ‚R_{po}‘.] ‚$R^{>0}(a, b)$‘ besagt, daß eine endliche (positive) Potenz von R zwischen a und b besteht; ‚$R^{\geqq 0}(a, b)$‘ besagt, daß entweder eine endliche (positive) Potenz von R zwischen a und b besteht oder a und b identische R-Glieder sind, also R^0 zwischen ihnen besteht. Diese Überlegungen führen zu den folgenden Definitionen.

D36—2. $H^{\geqq 0}(x, y) \equiv mem(H)\, x \,.\, (F)\, [Her(F, H) \,.\, Fx \supset Fy]$.

D36—3. $H^{>0} = (H \mid H^{\geqq 0})$.

Beispiele. Bezeichnet ‚*Vorg*‘ die Vorgängerrelation zwischen natürlichen Zahlen, so besagt ‚$Vorg^{>0}(a, b)$‘: „a ist kleiner als b“, und ‚$Vorg^{\geqq 0}(a, b)$‘: „a ist kleiner oder gleich b“. — 2. ‚$Elt^{>0}(a, b)$‘ besagt: „a ist Vorfahre von b“; ‚$Elt^{\geqq 0}(a, b)$‘ besagt: „a ist Vorfahre von b oder identisch mit b“.

L36—1. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr.

a. $H^0 \subset H^{\geqq 0}$.
b. $H \subset H^{\geqq 0}$.
c. $H^2 \subset H^{\geqq 0}$
usw.
d. $H \subset H^{>0}$.
e. $H^2 \subset H^{>0}$
usw.
f. $H^{>0} \subset H^{\geqq 0}$.
g. $H^{>0} = H^{\geqq 0} \mid H$.
h. $H^{\geqq 0} = H^{>0} \vee H^0$.

i. $H^{>0}(x, y) \equiv (F)\,[Her(F, H) \,.\, (z)\,(Hxz \supset Fz) \supset Fy]$.

j. $Trans(H^{\geqq 0})$; $Trans(H^{>0})$.
Ketten beider Arten sind stets transitiv. Daher sind sie häufig Reihen, auch wenn die ursprüngliche Relation keine Reihe ist.

k. $Her(F, H) \equiv H^{-1}\text{“}F \subset F$.

Der Gedanke, den Begriff der erblichen Eigenschaften zu verwenden, um das ‚usw.' in der Mathematik zu explizieren und den Begriff der endlichen Anzahl zu definieren, stammt von Frege (s. [Begriffsschrift] 55ff., [Grundgesetze] I 59ff.; vgl. [P. M.] I 569ff., Russell [Einführung] 20ff.

36c. *R*-Familien. Unter der R-Nachkommenschaft von a verstehen wir die Klasse der Glieder, zu denen a in der Relation $R^{\geqq 0}$ steht, also $R^{\geqq 0}(a, —)$. Unter der R-Vorfahrenschaft von a verstehen wir die Klasse der Glieder, die zu a in der Relation $R^{\geqq 0}$ stehen, also $R^{\geqq 0}(—, a)$. (a wird also zu seiner eigenen Nachkommenschaft und Vorfahrenschaft gerechnet.) Die Vereinigung von R-Vorfahrenschaft und R-Nachkommenschaft von a, also $R^{\geqq 0}(—, a) \vee R^{\geqq 0}(a, —)$, heißt R-Familie von a, bezeichnet mit ‚$fam(R, a)$'. Unter dem R-Intervall zwischen a und b, bezeichnet mit ‚$int(R, a, b)$', verstehen wir den Durchschnitt der R-Nachkommenschaft von a mit der R-Vorfahrenschaft von b, also $R^{\geqq 0}(a, —) \,.\, R^{\geqq 0}(—, b)$. Die Funktoren ‚$fam$' und ‚$int$' werden somit wie folgt definiert:

D36—4. $fam(H, x) = H^{\geqq 0}(—, x) \vee H^{\geqq 0}(x, —)$.

D36—5. $int(H, x, y) = H^{\geqq 0}(x, —) \,.\, H^{\geqq 0}(—, y)$.

In Teil II, Anwendungen der Logik, können jetzt die folgenden Systeme in Sprache C gelesen werden: **53b** und **54a** und **b**.

37. Endliches und Unendliches

37a. Progressionen. Die Vorgängerrelation *Vorg* in der Reihe der natürlichen Zahlen besitzt folgende Eigenschaften: (1) sie ist eineindeutig; (2) sie hat genau ein Anfangsglied; (3) sie hat kein Endglied; (4) für je zwei verschiedene Glieder gilt, daß eines von ihnen von dem andern in endlich vielen *Vorg*-Schritten erreichbar ist, mit andern Worten, die Relation $Vorg^{>0}$ ist zusammenhängend. Hat eine Relation R diese vier Eigenschaften, so sagen wir, R sei eine Progression, in Zeichen: ‚$Prog(R)$'. Sind zwei Progressionen R und S gegeben, so kann man in folgender Weise einen Korrelator für sie bestimmen: man ordnet das Anfangsglied von R dem Anfangsglied von S zu; ist irgend ein Glied x von R einem Glied y von S zugeordnet, so ordnet man den R-Nachfolger von x dem S-Nachfolger von y zu. Also sind je zwei Progressionen miteinander isomorph (s. unten, L1a). Ferner sieht man leicht, daß jede mit einer Progression isomorphe Relation auch eine Progression ist (L1b). Also ist *Prog* eine (zweistellige) Struktur (L1c).

Eine Klasse P heißt abzählbar, in Zeichen ‚$\aleph_0(P)$' (Aleph-null), wenn es eine Progression gibt, deren Glieder die Elemente von P sind.

Ein Korrelator zwischen zwei Progressionen ist zugleich ein Klassenkorrelator zwischen ihren Feldern; daher gelten hier analoge Lehrsätze wie für Progressionen (L1d, e, f). L1f besagt, daß $\aleph_0$ eine Kardinalzahl ist; und zwar ist es die kleinste transfinite, d. h. nicht endliche Kardinalzahl.

D37—1. $Prog(H) \equiv Un_{1,2}(H) \, . \, 1(init(H)) \, . \, 0(init(H^{-1})) \, . \, Connex(H^{>0})$.

D37—2. $\aleph_0(F) \equiv (\exists H)[Prog(H) \, . \, F = mem(H)]$.

L37—1. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr.

a. $Prog(H) \, . \, Prog(K) \supset Is_2(H, K)$.

b. $Prog(H) \, . \, Is_2(H, K) \supset Prog(K)$.

+**c.** $Str_2(Prog)$. (Aus (a), (b), L34—3c.)

d. $\aleph_0(F) \, . \, \aleph_0(G) \supset Is_1(F, G)$. (Aus (a).)

e. $\aleph_0(F) \, . \, Is_1(F, G) \supset \aleph_0(G)$. (Aus (b).)

+**f.** $Str_1(\aleph_0)$. (Aus (d), (e), L34—3c.)

37b. Summe und Vorgängerrelation. Sind M_1 und M_2 Kardinalzahlen (Str_1), so wollen wir ihre arithmetische Summe mit ‚$sum(M_1, M_2)$' bezeichnen (gewöhnlich mit ‚$M_1 + M_2$' bezeichnet). Diese Summe ist die Kardinalzahl jeder Klasse, die in zwei elementfremde Teilklassen zerlegt werden kann, derart, daß die eine die Kardinalzahl M_1 und die andere M_2 hat. — Sind M_1 und M_2 Kardinalzahlen, so besagt ‚$Vorg(M_1, M_2)$', daß M_1 der unmittelbare Vorgänger von M_2 ist, d. h. daß $M_1 + 1 = M_2$ ist. [In den folgenden Definitionen für ‚*sum*' und ‚*Vorg*' sind die Argumente nicht auf Kardinalzahlen beschränkt, sondern können beliebige Klassen (mindestens zweiter Stufe) sein. Da ‚*sum*' und ‚*Vorg*' aber praktisch nur für Kardinalzahlen verwendet werden, so ist es gleichgültig, welche Bedeutungen diese Zeichen für andere Argumente haben.]

D37—3. $sum(N_1, N_2)(F) \equiv (\exists G_1)(\exists G_2)[(F = G_1 \vee G_2) \, . \sim \exists (G_1 \, . \, G_2) \, . \, N_1(G_1) \, . \, N_2(G_2)]$.

D37—4. $Vorg(N_1, N_2) \equiv (sum(N_1, 1) = N_2)$.

L37—2. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr.

a. $Str_1(N_1) \, . \, Str_1(N_2) \supset Str_1(sum(N_1, N_2))$.
Die Summe zweier Kardinalzahlen ist wiederum eine Kardinalzahl.

b. $Str_1(N_1) \, . \, Vorg(N_1, N_2) \supset Str_1(N_2)$. (Aus (a).)

c. $sum(0, 1) = 1$; $sum(1, 1) = 2$; $sum(2, 1) = 3$; usw.

d. $Vorg(0, 1)$; $Vorg(1, 2)$; $Vorg(2, 3)$; usw. (Aus (c).)

e. $sum(\aleph_0, 1) = \aleph_0$.

Beweis. R sei eine Progression, und P sei ihr Feld. Also ist P abzählbar. Q sei die Teilklasse von P ohne das Anfangsglied a von R. S sei R beschränkt auf Q, also die Teilrelation von R ohne das erste Paar. Dann ist auch S eine Progression. Da Q das Feld von S ist, so ist Q abzählbar. P ist $Q \vee \{a\}$, hat also die Kardinalzahl $sum(\aleph_0, 1)$, aber auch die Kardinalzahl $\aleph_0$.

37c. Induktive Kardinalzahlen. Es gibt zwei Wege, um den Unterschied zwischen endlichen und unendlichen Klassen zu explizieren und, im Zusammenhang damit, den Unterschied zwischen endlichen und unendlichen Kardinalzahlen. Bei der ersten Methode wird der Begriff des Endlichen durch den Begriff der induktiven Kardinalzahlen expliziert. Eine Kardinalzahl M heißt eine induktive Kardinalzahl (in Zeichen ‚$Str_1 Induct\,(M)$'), wenn M entweder 0 ist oder durch endlichmaliges Addieren von 1, also durch endlich viele *Vorg*-Schritte, von 0 aus erreichbar ist, in andern Worten, wenn die Relation $Vorg^{\geqq 0}$ zwischen 0 und M besteht. P heißt eine induktive Klasse (in Zeichen ‚$ClsInduct\,(P)$'), wenn P eine induktive Kardinalzahl hat.

D37—5. $Str_1 Induct\,(N) \equiv Vorg^{\geqq 0}\,(0, N)$.

D37—6. $ClsInduct = sm_1\,(Str_1\,Induct)$.

Das Prinzip der mathematischen Induktion, das in arithmetischen Beweisen häufig verwendet wird, besagt Folgendes: „Wenn etwas für die Zahl 0 gilt und, falls es für irgend eine Zahl N gilt, stets auch für $N + 1$ gilt, so gilt es für jede endliche Zahl". Offenbar darf man nicht sagen „für jede Zahl", sondern muß die Behauptung auf endliche Zahlen beschränken. Denn z. B. die durch ‚$N \neq N + 1$' ausgedrückte Eigenschaft kommt der 0 zu; ferner, wenn sie irgend einer Zahl N zukommt, so auch stets der Zahl $N + 1$; aber sie gilt nicht für $\aleph_0$ (L2e). Die beschriebene Methode der Explikation von ‚endliche Zahl' durch ‚induktive Kardinalzahl' definiert im wesentlichen diese Zahlen als die, für die das Prinzip der mathematischen Induktion gilt. Denn aus der Definition D5 folgt, daß N dann und nur dann eine induktive Kardinalzahl ist, wenn das Induktionsprinzip für N gilt (L3d). Aus dem vorhin genannten Beispiel folgt, daß das Induktionsprinzip nicht für $\aleph_0$ gilt; also ist $\aleph_0$ keine induktive Kardinalzahl (L3e).

L37—3. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr.

a. $Str_1\,Induct\,(M)$,
wo ‚M' irgend eines der nach D17—3 definierten Prädikate ‚0', ‚1', ‚2' usw. ist. (Aus L2d).

b. $Str_1\,Induct \subset Str_1$.

c. $Str_1\,Induct\,(N) \equiv (K)\,[Her(K, Vorg)\,.\,K(0) \supset K(N)]$. (Aus D36—2.)

d. $Str_1\,Induct\,(N_1) \equiv (K)\,[K(0)\,.\,(N_2)\,[K(N_2) \supset K(sum\,(N_2, 1))] \supset K(N_1)]$. (Aus (c), D36—1, D4.)

e. $\sim Str_1\,Induct\,(\aleph_0)$. (Aus L2e.)

37d. Reflexive Klassen. Wir fanden früher, daß eine gewisse Teilrelation einer Progression R auch eine Progression ist, und daß daher das Feld P von R sowohl selbst abzählbar ist, als auch eine abzählbare echte (d. h. nicht mit P identische) Teilklasse hat (s. Beweis für L2e). Daher ist P isomorph mit einer echten Teilklasse von P (L1d). Bei einer endlichen Klasse kann dies offenbar nicht vorkommen; eine echte Teilklasse

von ihr hat stets eine kleinere Kardinalzahl. Die zweite Methode der Explikation des Unterschiedes zwischen endlich und unendlich besteht nun darin, die unendlichen Klassen zu explizieren als diejenigen, die mit einer echten Teilklasse isomorph sind. Eine Klasse P, die diese Bedingung erfüllt, heißt eine reflexive Klasse, in Zeichen ‚*ClsRefl* (P)'. (Dieser Begriff ist nicht zu verwechseln mit dem der reflexiven Relationen, D31—3a.) Die Kardinalzahl M einer reflexiven Klasse heißt eine reflexive Kardinalzahl, in Zeichen ‚Str_1Refl (M)' (D8). Dieser Begriff wird hier als Explikatum für den Begriff der unendlichen Kardinalzahl genommen.

D37—7. $ClsRefl\,(F) \equiv (\exists\, G)\,[(G \subset F)\,.\,(G \neq F)\,.\,Is_1\,(G, F)]$.

D37—8. $Str_1Refl = str``ClsRefl$.

Das Verhältnis zwischen den beiden Einteilungen ist Folgendes. Induktivität und Reflexivität schließen einander aus (L4b). Auf Grund des Auswahlprinzips (das im System B als Grundsatz genommen ist, G11, **22a, b**) gilt ferner, daß, abgesehen von der uneigentlichen leeren Kardinalzahl Λ_1, jede Kardinalzahl entweder induktiv oder reflexiv ist, so daß die beiden Einteilungen übereinstimmen (L4c). Für Klassen stimmen die beiden Einteilungen ohne Ausnahme überein (L4d).

L37—4. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr.

a. $Str_1\,Refl \subset Str_1$.

b. $Str_1\,Refl \subset \sim Str_1\,Induct$.

c. $Str_1\,(N)\,.\sim (N = \Lambda_1) \supset [Str_1Refl\,(N) \equiv \sim Str_1Induct\,(N)]$.

d. $ClsRefl = \sim ClsInduct$. (Aus (c).)

e. $\aleph_0 \subset ClsRefl$. (Aus L2e.)
Die abzählbaren Klassen sind reflexiv.

f. $\exists\,(\aleph_0) \equiv Str_1Refl\,(\aleph_0)$. (Aus (e), L1f.)
Wenn $\aleph_0$ nicht leer ist, so ist es eine reflexive Kardinalzahl, und umgekehrt.

37e. Unendlichkeitsannahme. Zuweilen wird in einem System die Annahme zugrunde gelegt, daß es unendlich viele Individuen gibt, sei es als Grundsatz in einem Kalkül („Unendlichkeitsaxiom", s. Bemerkung zu G12 im Kalkül B, **22a, b**), sei es als Regel in einem semantischen System, durch die die Unendlichkeitsaussage L-wahr wird. [Die Frage, ob es berechtigt ist, diese Aussage als rein logisch aufzufassen, ist jedoch umstritten; vgl. Carnap [Syntax E] §38a.] In andern Fällen wird diese Annahme nicht im System festgelegt, sondern nur als Prämisse verwendet, aus der andere Sätze abgeleitet werden. Wenn man auf Grund der Definition der induktiven Kardinalzahlen, durch die der Begriff der natürlichen Zahlen expliziert wird, ein System der Arithmetik der natürlichen Zahlen aufbauen will, in dem die üblichen arithmetischen Lehrsätze beweisbar sind, so muß man die Unendlichkeitsannahme zugrunde legen. Alle positiven arithmetischen Aussagen ohne Variable, z. B. ‚$5 + 2 = 7$', sind zwar ohne die Unendlichkeitsannahme beweisbar, aber nicht gewisse

negative Aussagen, z. B. ‚$6 \neq 6 + 1$' (vgl. L5e und die nachfolgenden Bemerkungen in Kleindruck). Der folgende Lehrsatz gibt verschiedene Formulierungen für die Unendlichkeitsannahme.

L37—5. Die folgenden Sätze (a) bis (i) sind L-äquivalent miteinander. Jeder von ihnen besagt, daß die Anzahl der Individuen unendlich ist. (Wenn irgend einer dieser Sätze als Grundsatz („Unendlichkeitsaxiom") aufgestellt wird, so sind alle übrigen beweisbar.) [Ein oberer linker Index bei einer logischen Konstanten bezeichnet hier die Stufe, zu der diese Konstante in dem betreffenden Satz gehören soll. So ist z. B. ${}^2\mathit{Prog}$ eine Klasse zweiter Stufe, nämlich die Klasse der Progressionen erster Stufe, also der Progressionen von Individuen.]

a. $\exists\,({}^2\aleph_0)$.
Es gibt eine abzählbare Klasse von Individuen.

+b. $\exists\,({}^2\mathit{Prog})$.
Es gibt eine Progression von Individuen.

+c. $(N)\,[{}^3\mathit{Str}_1\mathit{Induct}\,(N) \supset \exists\,(N)]$.
Für jede induktive Kardinalzahl N gibt es eine Klasse mit N Individuen.

d. $\sim {}^3\mathit{Str}_1\mathit{Induct}\,({}^2\Lambda_1)$.
Die leere Klasse (zweiter Stufe) ist keine induktive Kardinalzahl.

e. $(N)\,[{}^3\mathit{Str}_1\mathit{Induct}\,(N) \supset N \neq \mathit{sum}\,(N, 1)]$.
Für keine induktive Kardinalzahl N ist $N = N + 1$.

+f. $\exists\,({}^2\mathit{ClsRefl})$.
Es gibt eine reflexive Klasse von Individuen.

g. ${}^3\mathit{Str}_1\mathit{Refl}\,({}^2\aleph_0)$. (Aus L4f.)
$\aleph_0$ ist eine reflexive Kardinalzahl.

h. ${}^4\mathit{Prog}\,({}^3\mathit{Vorg}\ \mathit{in}\ {}^3\mathit{Str}_1\mathit{Induct})$.
Die Vorgängerrelation für induktive Kardinalzahlen ist eine Progression.

i. ${}^4\aleph_0\,({}^3\mathit{Str}_1\mathit{Induct})$.
Die Klasse der induktiven Kardinalzahlen ist abzählbar.

Um die verschiedenen Formulierungen der Unendlichkeitsannahme und die Tatsache, daß gewisse Sätze nur mit Hilfe dieser Annahme beweisbar sind, besser zu verstehen, mache man sich klar, welche Folgen es hat, wenn der Individuenbereich endlich ist. Angenommen, die Anzahl der Individuen sei 5; dann gilt Folgendes, wie man an Hand der früheren Definitionen leicht feststellt. (Die entsprechenden Sätze sind beweisbar, falls als Grundsatz G12 ein Satz aufgestellt wird, der besagt, daß die Anzahl der Individuen 5 ist, z. B. ‚$5\,(V_1)$', wo ‚V_1' ein Prädikat erster Stufe ist.) Die Kardinalzahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 sind alle verschieden voneinander und nicht-leer. Dagegen sind die induktiven Kardinalzahlen 6, 7 usw. alle leer und daher identisch miteinander (L29—3c). Es gilt $6 = 6 + 1 = 7$. Jede Klasse von Individuen ist eine induktive Klasse. Es gilt: *Vorg* (5, 6), *Vorg* (6, 7), aber wegen $6 = 7$ auch *Vorg* (5, 7). Da $5 \neq 6$, so ist die Relation *Vorg* zwischen induktiven Kardinalzahlen nicht voreindeutig und daher keine Progression. Obwohl die Anzahl der Klassen von Stufe zu Stufe anwächst, gibt es auf keiner endlichen Stufe eine unendliche Klasse oder eine Progression. Also sind *Prog* und $\aleph_0$ auf jeder endlichen Stufe leer.

Aus der angewandten Logik (Teil II) können jetzt die folgenden Systeme in Sprache C gelesen werden: **44b**, **46a** und **51b**.

38. Stetigkeit

38a. Wohlgeordnete, dichte und rationale Reihen. a heißt ein Maximum von P in bezug auf R, in Zeichen ‚$max\,(P, R)\,(a)$', wenn a ein R-Glied ist, das zur Klasse P gehört, aber zu keinem Element von P die Relation R besitzt. Ein Maximum von P in bezug auf R^{-1} heißt ein Minimum von P in bezug auf R.

D38—1. $max\,(F, H)\,(x) \equiv Fx \,.\, mem\,(H)\,(x) \,.\, \sim (\exists\, y)\,(Fy \,.\, Hxy)$.

Eine Relation R heißt wohlgeordnet, in Zeichen ‚$BOrd\,(R)$' (bene ordinata), wenn jede nicht-leere Klasse von R-Gliedern mindestens ein Minimum in bezug auf R hat. Die Klassen der wohlgeordneten Reihen werden mit ‚Ω' bezeichnet. Die Strukturen wohlgeordneter Reihen heißen Ordinalzahlen (‚NO', numerus ordinalis).

D38—2. $BOrd\,(H) \equiv (F)\,[(F \subset mem\,(H)) \,.\, \exists\,(F) \supset \exists\,(max\,(F, H^{-1}))]$.

D38—3. $\Omega = BOrd \,.\, Ser$.

D38—4. $NO = str_2 \text{``}\, \Omega$.

R heißt dicht, wenn es für je zwei Glieder x und y, zwischen denen R besteht, ein Zwischenglied u gibt derart, daß Rxu und Ruy; mit andern Worten, wenn R in R^2 enthalten ist.

R heißt eine rationale Reihe, in Zeichen ‚$\eta\,(R)$', wenn R eine dichte Reihe ist, deren Feld abzählbar ist.

D38—5. $\eta(H) \equiv Ser(H) \,.\, (H \subset H^2) \,.\, \aleph_0\,(mem\,(H))$.

Wir teilen die rationalen Reihen in vier Arten ein, die wir durch Indizes kennzeichnen: (1) es gibt kein Anfangsglied und kein Endglied (η_{00}); (2) es gibt (mindestens) ein Anfangsglied, aber kein Endglied (η_{10}); (3) es gibt kein Anfangsglied, aber ein Endglied (η_{01}); (4) es gibt ein Anfangsglied und ein Endglied (η_{11}). Analoge Unterscheidungen machen wir bei den Begriffen in **38b**. Rationale Reihen derselben Art sind isomorph miteinander (L 1 a); jede der vier Arten ist eine Struktur (L 1 c). Beispiele: Die Relation Kleiner für die rationalen Zahlen zwischen 2 und 3 ohne 2 und 3 ist eine rationale Reihe der Art η_{00}; mit 2 allein, η_{10}; mit 3 allein, η_{01}; mit 2 und 3, η_{11}.

38b. Dedekindsche und Cantorsche Stetigkeit. R heißt eine Dedekindsche Relation (‚$Ded\,(R)$'), wenn Folgendes gilt: für je zwei nicht-leere Klassen F, G, derart, daß jedes Element von F in der Relation R zu jedem Element von G steht, gibt es ein z, das F und G trennt; damit ist gemeint, daß, wenn x ein beliebiges von z verschiedenes Element von F und y ein beliebiges von z verschiedenes Element von G ist, die Relation R zwischen x und z und zwischen z und y besteht:

D38—6. $Ded(H) \equiv (F)\,(G)\,[\exists(F) \,.\, \exists(G) \,.\, (x)\,(y)\,(Fx \,.\, Gy \supset Hxy)$
$\supset (\exists\, z)\,[(x)\,(Fx \,.\, x \neq z \supset Hxz) \,.\, (y)\,(Gy \,.\, y \neq z \supset Hzy)]]$.

R heißt eine DEDEKINDsche Reihe oder eine Reihe von DEDEKINDscher Stetigkeit (‚$SerDed(R)$'), wenn R eine dichte Reihe und eine DEDEKINDsche Relation ist:

D38—7. $SerDed(H) \equiv Ser(H) \,.\, (H \subset H^2) \,.\, Ded(H)$.

R heißt stetig, oder genauer: von CANTORscher Stetigkeit, in Zeichen ‚$\vartheta(R)$', wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind. R ist eine DEDEKINDsche Reihe, und es gibt eine abzählbare Klasse von R-Gliedern derart, daß zwischen den Gliedern jedes R-Paares ein Element der Klasse liegt. Somit hat jede stetige Relation auch DEDEKINDsche Stetigkeit; die Umkehrung gilt jedoch nicht.

D38—8. $\vartheta(H) \equiv SerDed(H) \,.\, (\exists F)\, [\aleph_0(F) \,.\, (x)\, (y)\, (Hxy \supset (\exists u)\, (Fu \,.\, Hxu \,.\, Huy))]$.

Analog zu der früheren Einteilung der rationalen Reihen in vier Arten η_{mn} ($m = 0$ oder 1, $n = 0$ oder 1), teilen wir die DEDEKINDschen Relationen Ded in vier Arten Ded_{mn} ein; ebenso $SerDed$ in vier Arten $SerDed_{mn}$, und ϑ in vier Arten ϑ_{mn}. Stetige Relationen derselben Art sind isomorph miteinander (L1d); jede der vier Arten ϑ_{mn} ist eine Struktur (L1f). Das ist der Vorzug dieses (CANTORschen) Stetigkeitsbegriffs vor dem DEDEKINDschen. Die Relation Kleiner für die reellen Zahlen irgend eines Intervalles bildet eine stetige Reihe; die rationalen Zahlen desselben Intervalles bilden in diesem Fall die abzählbare Klasse von Zwischengliedern. Die Relation Kleiner für alle reellen Zahlen ist eine stetige Reihe der Art ϑ_{00}.

L38—1. Die folgenden Satzformeln sind L-wahr. (Für den Index ‚m' ist ‚0' oder ‚1' zu setzen, und ebenso für ‚n'.)

a. $\eta_{mn}(H) \,.\, \eta_{mn}(K) \supset Is_2(H, K)$.
b. $\eta_{mn}(H) \,.\, Is_2(H, K) \supset \eta_{mn}(K)$.
+c. $Str_2(\eta_{mn})$. (Aus (a), (b), L34—3c.)
d. $\vartheta_{mn}(H) \,.\, \vartheta_{mn}(K) \supset Is_2(H, K)$.
e. $\vartheta_{mn}(H) \,.\, Is_2(H, K) \supset \vartheta_{mn}(K)$.
+f. $Str_2(\vartheta_{mn})$. (Aus (d), (e), L34—3c.)

Aus der angewandten Logik (Teil II) können jetzt die folgenden Systeme in Sprache C gelesen werden: **45**, **48a—c** und **52c**.

Zweiter Teil

Anwendungen der symbolischen Logik

A. Formen und Methoden des Sprachaufbaues

Vorbemerkungen. In Teil II soll gezeigt werden, wie die symbolische Logik angewendet werden kann, sei es zur Symbolisierung von allgemeinen Sprachen, sei es zur Formulierung von besonderen Axiomensystemen. Dabei werden im allgemeinen die in Teil I dargestellten symbolischen Sprachen verwendet, zuweilen mit gewissen Modifikationen (z. B. in **40**).

Kapitel II A enthält einige allgemeine Erörterungen über Methoden und Formen des Aufbaues von Sprachen. Zunächst werden Dingsprachen ohne quantitative Bestimmungen erörtert, die sich ganz im Rahmen der früher dargestellten Sprachformen halten (**39**). Dann werden Sprachformen erklärt, die im Unterschied zu der früheren Form nicht Gegenstandsbezeichnungen, sondern Stellenbezeichnungen (Zahlausdrücke als Koordinaten) als Individualausdrücke enthalten; wir nennen sie Koordinatensprachen (**40**). Es folgen einige allgemeine Bemerkungen über die Formulierung von quantitativen Begriffen, sei es in Dingsprachen oder in Koordinatensprachen; solche Formulierungen dienen hauptsächlich zur Angabe des Wertes von Maßgrößen (**41**). Schließlich wird die Methode der Axiomensysteme (ASe) dargestellt und ihre Beziehung zum Verfahren der Symbolisierung und der Formalisierung erörtert (**42**). In den Kapiteln II B bis E wird eine Reihe von Axiomensystemen symbolisch formuliert.

39. Dingsprachen

39a. Dinge und ihre Schichten. In vielen Zweigen der empirischen Wissenschaft haben wir es mit physischen Dingen, ihren Eigenschaften und Relationen zu tun, sei es mit anorganischen Dingen, z. B. Steinen, oder organischen Dingen, z. B. Organismen und ihren Teilen, besonders Menschen. Ein *Ding* nimmt in einem bestimmten Zeitpunkt ein bestimmtes Raumgebiet ein, also während der ganzen Dauer seines Bestehens eine zeitliche Reihe von Raumgebieten, also ein Gebiet im vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum. Ein gegebenes Ding in einem bestimmten Zeitpunkt — zuweilen ein Dingmoment genannt — ist sozusagen ein räumlicher Querschnitt durch das ganze von dem Ding eingenommene Raum-Zeit-Gebiet. Wir nennen deshalb ein Dingmoment auch eine Schicht des Dinges. Ein Ding wird somit aufgefaßt als zeitliche Reihe seiner Schichten. Das ganze von dem Ding eingenommene Raum-Zeit-

Gebiet ist eine Klasse gewisser Raum-Zeit-Punkte, die wir die Raum-Zeit-Punkte des Dinges nennen. Für die Symbolisierung von Sätzen über Dinge gibt es nun mehrere verschiedene mögliche Sprachformen, die sich durch die Verwendung verschiedener Typen unterscheiden. Die wichtigsten Fragen hierbei sind: (1) Was wird in der betreffenden Sprachform durch Ausdrücke vom Individuentypus bezeichnet? (2) Zu welchem Typus gehören die Bezeichnungen der Dinge?

Wir wollen einige der wichtigsten Relationen zwischen Raum-Zeit-Punkten oder Raum-Zeit-Gebieten nennen und symbolische Prädikate für sie angeben, die wir später in Beispielen verwenden werden. Prädikate für diese Relationen mögen entweder als primitive Prädikate eingeführt werden oder definiert auf Grund anderer Prädikate. Zu den wichtigsten Relationen zwischen Raum-Zeit-Punkten gehören Gleichzeitigkeit (‚*Glz* (x, y)': x und y sind gleichzeitig, d. h. sie sind Raum-Zeit-Punkte, die zu demselben Zeitpunkt gehören) und Zeitrelation (‚Zxy': x ist früher als y, d. h. der Raum-Zeit-Punkt x gehört zu einem früheren Zeitpunkt als der Raum-Zeit-Punkt y). Zu den wichtigsten Relationen zwischen Raum-Zeit-Gebieten als Individuen gehören die folgenden: Gleichzeitigkeit (‚*Glzg* (x, y)': die Gebiete x und y sind (gänzlich) gleichzeitig); Zeitrelation (‚*Zg* (x, y)': das Gebiet x ist (gänzlich) früher als das Gebiet y); Teil-Relation (‚Pxy': x ist ein Teil von y; wenn die Gebiete nicht als Individuen, sondern als Klassen von Raum-Zeit-Punkten dargestellt werden, so brauchen wir hierfür kein neues Prädikat, da die Teilklassenrelation genügt); Schicht-Ding-Relation (‚*Sch* (x, y)': x ist eine Schicht des Dinges y). In einer andern Sprachform, in der die Raum-Zeit-Gebiete als Klassen dargestellt werden, kann man dieselben Zeichen für die genannten Relationen verwenden, aber dann als Prädikate höherer Stufe (z. B. ‚*Glzg* (F, G)' usw.). [Die genannten Relationen kommen in einigen der Axiomensysteme vor, die wir später behandeln werden. In dem System von **48** ist die Relation Z einer der Grundbegriffe, die Relation *Glz* wird definiert; in **49** werden diese beiden Relationen definiert. In **52** treten ‚*Zg*' und ‚P' als Grundzeichen auf, ‚*Sch*' als definiertes Zeichen.]

39b. Drei Formen der Dingsprache. Wir wollen nun die Dingsprachen in drei Hauptarten I, II, III einteilen und bei jeder noch einige Unterarten unterscheiden.

Sprachform I. Als Individuen werden Raum-Zeit-Gebiete und insbesondere Dinge genommen. Hier unterscheiden wir drei Unterarten.

Sprachform IA. Als Individuen werden nur vierdimensionale Raum-Zeit-Gebiete genommen, also auch die Dinge, aber nicht die Dingschichten. Wenn man in den Sätzen der Sprache nicht auf verschiedene Zeitpunkte Bezug nehmen will, ist dieses Verfahren am einfachsten. (Dies ist z. B. der Fall, wenn nur dauernde Eigenschaften der Dinge ausgesagt werden sollen, oder wenn die Dinge nur für einen bestimmten Zeitpunkt beschrieben werden sollen oder nur für eine gewisse Zeitstrecke, innerhalb deren man Änderungen vernachlässigt.)

Als Beispiele von Sätzen dieser Sprachform können wir diejenigen Beispielsätze in Teil I nehmen, die Dingprädikate wie ‚*Blau*', ‚*Stud*', ‚*Va*' usw. verwenden (s. die Aufzählung dieser Prädikate in **2c**, Individuenbereiche 1 und 2). Ferner gehören hierher die ASe der Verwandtschaftsbegriffe in **54a** und **b**.

Sprachform IB. Als Individuen werden beliebige Raum-Zeit-Gebiete endlicher Ausdehnung genommen, also insbesondere Dinge und Dingschichten, aber nicht Raum-Zeit-Punkte. Wenn man keine Aussagen über Raum-Zeit-Punkte machen will, sondern sich statt dessen mit Aussagen über kleine, aber endliche Raum-Zeit-Gebiete begnügt, dabei aber — im Unterschied zu I A — doch verschiedene Zeitpunkte unterscheiden will, so ist diese Sprachform am zweckmäßigsten. (Zu dieser Sprachform gehört das System von WOODGER, s. **52** und **53**.) Wenn man will, kann man auch innerhalb dieser Sprachform Raum-Zeit-Punkte darstellen, und zwar als Relationen von Individuen, nämlich als gegen null konvergierende Folgen von Gebieten. (Diese Methode zur Definition der „Punktereignisse" als „abstraktive Reihen" von „Ereignissen" wird z. B. von WHITEHEAD angewandt, s. **55**, Aufgabe 22.)

Beispiele. Für diese und die weiteren Sprachformen wollen wir als Beispiele folgende Sätze übersetzen. 1. „Peter war einmal in Wien und war später Student". 2. „Peter war jedesmal vergnügt, wenn er zugleich mit Herbert in Wien war". Hierfür verwenden wir folgende Zeichen: für „Peter" ‚*pe*' (wenn Individualkonstante, wie in I A, B, C) und ‚*Pe*' (wenn Prädikat; dies ist in II Aα und II Bα ein Prädikat von Stufe 1 und Stellenzahl 1, in II Aβ und II Bβ von 1 und 2, in IIIα von 1 und 1, in IIIβ von 2 und 1, in IIIγ von 1 und 2); ebenso für „Herbert" ‚*he*' und ‚*He*', für „Wien" ‚*wien*' und ‚*Wien*'; für „Student" ‚*Stud*'; für „vergnügt" ‚*Vergn*'.

Für Sprachform I B. 1. ‚$(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,[Sch\,(x, pe)\,.\,Sch\,(y, pe)\,.\,Zg\,(x, y)\,.\,P\,(x, wien)\,.\,Stud\,(y)]$'. — 2. ‚$(x)\,(y)\,[Sch\,(x, pe)\,.\,Sch\,(y, he)\,.\,P\,(x, wien)\,.\,P\,(y, wien)\,.\,Glzg\,(x, y) \supset Vergn\,(x)]$'. Ferner gelten hier auch die Beispiele für I A.

Sprachform I C. Als Individuen werden alle Raum-Zeit-Gebiete genommen, einschließlich der Raum-Zeit-Punkte (die letzteren werden definiert als kleinste nicht-leere Raum-Zeit-Gebiete). Diese Sprachform ist typenmäßig am einfachsten, weil Raum-Zeit-Punkte, Dingschichten und Dinge zu demselben Typus gehören.

Beispiele. S. die für I A und I B angegebenen.

39c. Sprachform II. Als Individuen werden Raum-Gebiete genommen, d. h. Raum-Zeit-Gebiete mit der zeitlichen Ausdehnung null, insbesondere Dingschichten und Schichten von Dingteilen. Wir unterscheiden zwei Arten dieser Form und in jeder wieder zwei Unterarten.

Sprachform II A. Als Individuen werden nur Raum-Gebiete mit endlicher räumlicher Ausdehnung genommen, also keine Raum-Zeit-Punkte. (Die letzteren können hier in derselben Weise wie in I B als Folgen dargestellt werden.)

II A α. Ein Ding wird als Klasse seiner Schichten dargestellt.

II A β. Ein Ding wird als Relation seiner Schichten dargestellt, etwa

als zeitliche Reihe. (Ist *R* ein Ding, so besagt ‚*Rab*': *a* und *b* sind Schichten von *R* und zwar ist *a* früher als *b*.)

Beispiele. Form α. 1. ‚$(\exists x)(\exists y)(\exists z)[Pe(x) . Pe(y) . Zg(x, y) . Wien(z) . Pxz . Stud(y)]$'. — 2. ‚$(x)(y)(z)[Pe(x) . He(y) . Wien(z) . Pxz . Pyz . Glzg(x, y) \supset Vergn(x)]$'. — Form β. 1. ‚$(\exists x)(\exists y)(\exists z)[Pe(x, y) . mem(Wien)(z) . Pxz . Stud(y)]$'. — 2. ‚$(x)(y)(z)[mem(Pe)\, x . mem(He)\, y . mem(Wien)(z) . Pxz . Pyz . Glzg(x,y) \supset Vergn(x)]$'. Beispiel (1) ist in Sprachform β einfacher als in α, (2) ist in α einfacher als in β. β ist demnach vorzuziehen, falls häufig von mehreren Schichten desselben Dinges und ihrer zeitlichen Anordnung die Rede ist.

Sprachform II B. Als Individuen werden alle Raumgebiete genommen, einschließlich der Raum-Zeit-Punkte. (Die letzteren werden definiert als kleinste nicht-leere Raumgebiete.) Unterarten α und β wie in II A.

Beispiele. S. die für II A angegebenen.

39d. Sprachform III. Als Individuen werden nur die Raum-Zeit-Punkte genommen. (Zu dieser Sprachform gehören die Systeme der Raum-Zeit-Topologie in **49** und **50**; das System in **48** gehört zu einer Sprachform, die ähnlich zu III und zu II B ist, mit Weltpunkten, d. h. Teilchenschichten, anstatt Raum-Zeit-Punkten als Individuen.) Dingschichten (und Schichten von Dingteilen) werden als Klassen von Raum-Zeit-Punkten dargestellt. Wir unterscheiden drei Unterarten in bezug auf die Darstellung der Dinge.

III α. Ein Ding wird dargestellt als Klasse seiner Raum-Zeit-Punkte. Eine Dingschicht ist hier eine Teilklasse des Dinges.

III β. Ein Ding wird dargestellt als Klasse seiner Schichten. Eine Dingschicht ist hier ein Element des Dinges.

III γ. Ein Ding wird dargestellt als Relation seiner Schichten, etwa als zeitliche Reihe (wie in II A β). Eine Dingschicht ist hier ein Glied des Dinges.

Beispiele. (Formuliert im Symbolismus der Sprache A; bei Anwendung von Sprache C kann die Teilklassenrelation kürzer mit Hilfe von ‚$\subset$' formuliert werden, D 28—3.) Form α. 1. ‚$(\exists F)(\exists G)[Sch(F, Pe) . Sch(G, Pe) . Zg(F, G) . (x)(Fx \supset Wien(x)) . Stud(G)]$'. — 2. ‚$(F)(G)[Sch(F, Pe) . Sch(G, He) . (x)(Fx \vee Gx \supset Wien(x)) . Glzg(F, G) \supset Vergn(F)]$'. — Form β. 1. ‚$(\exists F)(\exists G)(\exists H)[Pe(F) . Pe(G) . Zg(F, G) . Wien(H) . (x)(Fx \supset Hx) . Stud(G)]$'. — 2. ‚$(F)(G)(H)[Pe(F) . He(G) . Wien(H) . (x)(Fx \vee Gx \supset Hx) . Glzg(F, G) \supset Vergn(F)]$'. — Form γ. 1. ‚$(\exists F)(\exists G)(\exists H)[Pe(F, G) . mem(Wien)(H) . (x)(Fx \supset Hx) . Stud(G)]$'. — 2. $(F)(G)(H)[mem(Pe)(F) . mem(He)(G) . mem(Wien)(H) . (x)(Fx \vee Gx \supset Hx) . Glzg(F, G) \supset Vergn(F)]$'.

40. Koordinatensprache

40a. Koordinatensprache mit natürlichen Zahlen. In manchen Individuenbereichen ist jedes Individuum identifiziert durch seine Stellung in einem zugrunde gelegten Ordnungssystem. Diese Grundordnung mag etwa eine lineare Ordnung sein (z. B. von Personen, nach dem Alter) oder eine zirkuläre Ordnung (z. B. die der Farben im Farben-

kreis) oder eine mehrdimensionale (z. B. die dreidimensionale der Punkte im Raum). Unter einer Koordinatensprache verstehen wir eine Sprache, bei der die Stelle eines Individuums im zugrunde gelegten Ordnungssystem schon durch die Form seines Individualausdrucks angegeben ist und nicht erst durch Sätze über die Relationen zwischen ihm und den andern Individuen. Meist wird die Ordnung dadurch dargestellt, daß den Stellen als ihre „Koordinaten" Zahlen zugeordnet werden, so daß als Individualausdrücke Zahlausdrücke oder n-tupel von solchen (im Fall einer n-dimensionalen Ordnung) verwendet werden.

Wir wollen jetzt eine bestimmte Koordinatensprache aufbauen, indem wir die früher besprochene Sprache C (Kap. I C) in gewisser Weise ergänzen. Wir nehmen an, daß die Stellen des betreffenden Systems die Ordnung einer Progression haben (vgl. **37a**); also eine eindimensionale, diskrete Ordnung mit einer Anfangsstelle, ohne Endstelle. Wir führen zunächst Bezeichnungen für die natürlichen Zahlen ein. ‚0' bezeichnet die Zahl Null; der Nachfolger einer Zahl a wird mit ‚a'' bezeichnet. Somit bezeichnet ‚$0'$' die Zahl Eins, ‚$0''$' Zwei usw. Die Werte der Individualvariablen ‚x', ‚y' usw. sind die natürlichen Zahlen. Die Zahlausdrücke dienen nun indirekt zum Hinweis auf die Stellen der Progression. Der Anfangsstelle wird die Zahl 0 als „Koordinate" zugeordnet, der nächsten Stelle die Zahl 1, bezeichnet mit ‚$0'$', usf. ‚*Blau* $(0'')$' besagt dann: „Die Stelle mit der Koordinate 2 ist blau." Genau genommen bezeichnet ‚$0''$' nur die reine Zahl Zwei, während der Hinweis auf die Stelle nicht zur Bedeutung von ‚$0''$' gehört, sondern zu der des Prädikates ‚*Blau*'; letzteres bedeutet: „Die Stelle, die die Zahl .. als Koordinate hat, ist blau." Es ist jedoch bequem, so zu sprechen, als ob die Individualausdrücke nicht nur Zahlen, sondern auch die entsprechenden Stellen des betreffenden Systems bezeichneten; daher nennen wir dann oft diese Stellen (z. B. Raumpunkte oder Zeitpunkte oder Raum-Zeit-Punkte) die Individuen der betreffenden Koordinatensprache.

Ein wichtiges neues Ausdrucksmittel dieser Koordinatensprache ist der K-Operator. Dieser Operator wird nur mit Zahlvariablen verwendet. ‚$(Kx)(\ldots x \ldots)$' bedeutet: die kleinste natürliche Zahl x, die die Bedingung ‚$\ldots x \ldots$' erfüllt, oder Null, falls keine Zahl jene Bedingung erfüllt. Ein K-Ausdruck, d. h. ein Vollausdruck des K-Operators, bestehend aus Operator und Operand, z. B. ‚$(Kx)(Px)$', ist nach der gegebenen Erläuterung nicht ein Satz (wie die Vollausdrücke des All- und des Existenzoperators), sondern ein Individualausdruck, wie der Vollausdruck eines $\imath$-Operators (**35a**), und daher ein Zahlausdruck. Die K-Ausdrücke haben vor den $\imath$-Kennzeichnungen den Vorzug, daß sie stets eine und nur eine Zahl bezeichnen; daher sind hier die für die gewöhnlichen Kennzeichnungen nötigen Einschränkungen und Vorsichtsmaßregeln nicht nötig.

Die Form- und Umformungsregeln für den Kalkül einer Koordinatensprache der besprochenen Form sind im Grund die gleichen wie die früher für den Kalkül B angegebenen (**21**, **22**). Es werden nur die folgenden Regeln hinzugefügt.

Hinzufügungen zu den Formregeln. ‚0', ‚′' und ‚K' sind zusätzliche Grundzeichen. Diese Zeichen sind logisch, da sie zur Formulierung arithmetischer, also logischer, Aussagen über Zahlen dienen. Daher sind auch die Individualausdrücke ‚$0'$', ‚$0''$' usw. logisch. Ein K-Ausdruck ist aber unter Umständen deskriptiv, nämlich dann, wenn in seinem Operanden ein deskriptives Zeichen vorkommt. Zum Typus der Individualausdrücke gehören: die Individualvariablen, die Konstante ‚0', etwaige definierte Konstanten; $\mathfrak{A}_i'$, falls $\mathfrak{A}_i$ ein Individualausdruck ist; Ausdrücke von der Form $(K\mathfrak{v}_i)\,(\mathfrak{S}_j)$, wo $\mathfrak{v}_i$ eine Individualvariable ist, und Vollausdrücke gewisser Funktoren (s. z. B. unten D4 und D5).

Hinzufügungen zu den Umformungsregeln. Die folgenden Grundsätze werden hinzugefügt:

1. $(x)\,(0 \neq x')$.
2. $(x)\,(y)\,[x' = y' \supset x = y]$.
3. $(F)\,[F(0)\,.\,(x)\,(Fx \supset Fx') \supset (x)\,Fx]$.
4. $(G)\,(F)\,[G(Kx)(Fx) \equiv [\sim(\exists\, x)(Fx)\,.\,G(0)] \vee (\exists\, x)[Fx\,.$ $(z)((H)\,[Hz'\,.\,(u)\,(Hu \supset Hu') \supset Hx] \supset \sim Fz)\,.\,Gx]]$.

[Falls beschränkte Alloperatoren verwendet werden (s. unten), kann an Stelle des zweiten Disjunktionsgliedes einfacher ‚$(\exists\, x)\,[(z)\,x\,(Fz \equiv (z = x))\,.\,Gx]$' genommen werden.]

(1) besagt, daß 0 nicht Nachfolger von etwas ist. (2) besagt, daß verschiedene Glieder nicht denselben Nachfolger haben. (3) ist das Prinzip der vollständigen Induktion (vgl. **37c**). (4) vertritt eine Definition für den K-Operator; dieser Grundsatz besagt das Folgende, in Übereinstimmung mit der früheren Erläuterung: $(Kx)\,(Fx)$ hat die Eigenschaft G dann und nur dann, wenn entweder keine Zahl die Eigenschaft F hat und 0 G ist oder wenn es eine Zahl x gibt, derart, daß $x\,F$ ist, und jedes z, das kleiner als x ist (vgl. hierzu **36b**, Beispiel 1, und unten D2), nicht F ist, und x G ist.

Für manche Zwecke ist es nützlich, auch beschränkte Operatoren zu verwenden. Bei diesen wird zwischen Operator und Operand ein Zahlausdruck eingefügt, der den Zahlbereich, auf den sich der Operator beziehen soll, nach oben begrenzt. ‚$(x)\,0'''\,(Px)$' besagt: jede Zahl bis 3 (also 0, 1, 2 und 3) ist P. ‚$(\exists\, x)\,0''''\,(Qx)$' besagt: es gibt eine Zahl bis 4, die Q ist. ‚$(Kx)\,0'''\,(Px)$' besagt: die kleinste Zahl im Bereich von 0 bis 3, die P ist, und 0, falls es in diesem Bereich keine solche Zahl gibt.

Grundsätze für beschränkte Operatoren der drei genannten Arten sind angegeben in [Syntax], § 30, G II 7, 8, 9, 14. In [Syntax] Kap. I ist eine Sprachform I angegeben, die nur beschränkte Operatoren verwendet. Die einzigen Variablen sind hier Individualvariable, deren Werte natürliche Zahlen sind. Unbeschränkte Allaussagen über Zahlen können formuliert werden, nämlich durch offene Satzformeln, die als Sätze zugelassen sind. Unbeschränkte Existenzaussagen sind jedoch nicht formulierbar. Rekursive Definitionen sind zugelassen (s. z. B. unten D4 und D5). Jeder geschlossene logische Satz $\mathfrak{S}_i$ dieser Sprache ist entscheidbar; d. h. entweder $\mathfrak{S}_i$ oder $\sim \mathfrak{S}_i$ ist beweisbar, und es gibt ein Entscheidungsverfahren zur Auffindung des Beweises. Jeder geschlossene logische Zahlausdruck $\mathfrak{A}_i$ ist berechenbar; d. h. es gibt ein Verfahren zur Auffindung eines Zahlausdrucks $\mathfrak{A}_j$ in Normal-

form (‚0', ‚0'' usw.) derart, daß $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_j$ beweisbar ist. Diese Sprachform steht im Einklang mit gewissen philosophischen Auffassungen, die zuweilen als „Finitismus" oder „Konstruktivismus" bezeichnet werden. Nach diesen Auffassungen sind z. B. unbeschränkte Existenzsätze in unendlichen Bereichen sinnlos, und Prädikate und Funktoren sind nur dann sinnvoll, wenn über ihre Anwendbarkeit in jedem konkreten Fall eine Entscheidung nach festem Verfahren getroffen werden kann.

40b. Rekursive Definitionen. Um zu zeigen, wie bei der beschriebenen Sprachform arithmetische Begriffe in einfacher Weise definiert werden können, wollen wir einige Beispiele angeben. Hier ist es zweckmäßig, für Funktoren und Prädikate erster Stufe auch rekursive Definitionen zuzulassen, wie sie (besonders für Funktoren) in der Arithmetik üblich sind. Eine solche Definition besteht aus zwei Satzformeln; die erste gibt den Wert des betreffenden Funktors (bzw. den Wahrheitswert des betreffenden Prädikates) für 0 als erstes Argument an; die zweite bestimmt den Wert für x', unter Verwendung des Wertes für x (s. z. B. D4 und 5). Im folgenden werden definiert: Prädikate für die Relationen Vorgänger (‚*Vorg*'), Kleiner (‚*Kl*') und Größer (‚*Gr*'), Funktoren für die Funktionen Summe (‚*sum*') und Produkt (‚*prod*'), Prädikate für die Eigenschaften Teilbar (‚*Tlb*') und Primzahl (‚*Prim*') sowie einige der üblichen Ziffern.

D40—1. $Vorg\,(x, y) \equiv (x' = y)$.

D40—2. $Kl = Vorg^{>0}$. (Vgl. D36—3.)

D40—3. $Gr = Kl^{-1}$. (Vgl. D30—3.)

D40—4. (1) $sum\,(0, y) = y$.
(2) $sum\,(x', y) = sum\,(x, y)'$.

D40—5. (1) $prod\,(0, y) = 0$.
(2) $prod\,(x', y) = sum\,(prod(x, y), y)$.

D40—6. $Tlb\,(x, y) \equiv (\exists\, u)\,(x = prod\,(y, u))$.

D40—7. $Prim\,(x) \equiv [x \neq 0 \,.\, x \neq 0' \,.\, (u)\,((u = 0') \vee (u = x) \vee \sim Tlb\,(x, u))]$.

D40—8. **a.** $1 = 0'$.
b. $2 = 1'$.
c. $3 = 2'$.
usw.

40c. Koordinatensprache mit ganzen Zahlen. Eine ähnliche Koordinatensprache kann für ganze Zahlen (positive und negative ganze Zahlen und Null) als Individuen aufgebaut werden. Wie vorhin, bezeichnet ‚0' ein bestimmtes Ausgangselement oder die Zahl Null, und ‚a'' den Nachfolger von a, also die Zahl $a + 1$. Hier wollen wir ferner mit ‚$'a$' den Vorgänger von a, also die Zahl $a - 1$, bezeichnen. Hiernach bezeichnet ‚$'0$' -1, ‚$''0$' -2 usw. Die Deutung des K-Operators müssen wir hier etwas modifizieren, weil es im Bereich der ganzen Zahlen, im Unterschied zu dem der natürlichen Zahlen, vorkommen kann, daß es eine

Zahl mit der Eigenschaft F gibt, aber keine kleinste, nämlich dann, wenn es beliebig kleine negative Zahlen mit F gibt. Wir wollen festsetzen, daß der K-Ausdruck auch in diesem Fall die Zahl Null bezeichnet. Ferner wollen wir hier das Prädikat ,*Klgl*' als Grundzeichen nehmen; ,*Klgl* (a, b)' besagt, daß a kleiner oder gleich b ist (im Bereich der ganzen Zahlen). [Der nachfolgende Grundsatz (2) vertritt eine Definition für ,*Klgl*'. Das zeigt, daß ,*Klgl*' auch als definiertes Zeichen genommen werden könnte. Es ist aber zweckmäßig, es als Grundzeichen zu nehmen, weil dann die Grundsätze (3) und (4) einfacher formuliert werden können.]

An Stelle der vorhin (in **40a**) angegebenen Grundsätze werden hier die folgenden als zusätzliche Grundsätze aufgestellt.

1. a. $(x)\,[\,'(x') = x]$.
b. $(x)\,[('x)' = x]$.

2. $(x)\,(y)\,[Klgl\,(x, y) \equiv (F)\,(Fx \,.\, (u)\,(Fu \supset Fu') \supset Fy)]$.

3. $(x)\,[Klgl\,(x, 0) \vee Klgl\,(0, x)]$.

4. $(G)\,(F)\,[G(Kx)(Fx) \equiv ([(\sim (\exists\, x)\,[Fx] \vee (x)\,(\exists\, y)\,[Klgl(y, x) \,.\, Fy]) \,.\, G\,(0)] \vee (\exists\, x)\,[(y)\,(Klgl\,(y, x) \supset [Fy \equiv (y = x)]) \,.\, Gx])]$.

(1a) besagt, daß der Vorgänger des Nachfolgers von x stets x selbst ist, und (1b), daß der Nachfolger des Vorgängers von x x selbst ist; mit andern Worten, die Vorgängerrelation ist eineindeutig. (2) besagt, daß die Relation *Klgl* dann und nur dann zwischen x und y besteht, wenn y jede erbliche Eigenschaft von x hat (vgl. **36**); mit andern Worten, wenn y entweder identisch mit x oder von x aus in endlich vielen Schritten erreichbar ist. (3) besagt, daß zwischen jeder Zahl und 0 entweder in der einen oder der andern Richtung die Relation *Klgl*, also eine endliche Kette von Schritten, besteht; hierdurch wird der Bereich auf endliche ganze Zahlen eingeschränkt. (4) ist in Übereinstimmung mit der vorher angegebenen Erläuterung für den K-Operator.

Aus (2) und (3) ergibt sich die Anwendbarkeit des Prinzips der mathematischen Induktion einerseits in der gewöhnlichen Weise für die positiven ganzen Zahlen und anderseits in umgekehrter Richtung für die negativen ganzen Zahlen. Die rekursiven Definitionen bestehen hier aus drei Sätzen, der erste für 0, der zweite für x' bei $x \geq 0$, der dritte für $'x$ bei $x \leq 0$ (z. B. D11, 12 und 14). Wir geben einige Beispiele für Definitionen; ,*entg* (a)' bezeichnet die zu a entgegengesetzte Zahl, ,*diff* (a, b)' die Differenz $a-b$; die übrigen Prädikate und Funktoren haben eine entsprechende Bedeutung wie früher; D15 und D16 dienen zur Einführung der üblichen Schreibung für einige ganze Zahlen.

D40—9. $Vorg\,(x, y) \equiv (x' = y)$.

D40—10. $Kl(x, y) \equiv Klgl(x, y) \,.\, x \neq y$.

D40—11. (1) $sum\,(0, y) = y$.
(2) $Klgl\,(0, x) \supset (sum\,(x', y) = sum\,(x, y)')$.
(3) $Klgl\,(x, 0) \supset (sum\,('x, y) = {}'sum\,(x, y))$.

D 40—12. (1) $entg\,(0) = 0.$
(2) $Klgl(0, x) \supset (entg(x') = {}'entg(x)).$
(3) $Klgl(x, 0) \supset (entg('x) = entg(x)').$

D 40—13. $diff(x, y) = sum\,(x, entg(y)).$

D 40—14. (1) $prod(0, y) = 0.$
(2) $Klgl\,(0, x) \supset (prod\,(x', y) = sum\,(prod\,(x, y), y)).$
(3) $Klgl\,(x, 0) \supset (prod\,('x, y) = diff\,\,(prod\,(x, y), y)).$

D 40—15. **a.** $+1 = 0'.$
b. $+2 = 1'.$
c. $+3 = 2'$
usw.

D 40—16. **a.** $-1 = {}'0.$
b. $-2 = {}'{-1}.$
c. $-3 = {}'{-2}$
usw.

Die hier erklärte Sprachform wird in **46c** zur Definition der Begriffe der Dimensionszahl angewendet (D 19ff.)

40d. Reelle Zahlen. Für die Einführung weiterer Zahlarten und insbesondere der reellen Zahlen sind zwei verschiedene Wege gangbar: man kann entweder auf der Basis der natürlichen oder der ganzen Zahlen weiter aufbauen oder eine neue Basis legen, d. h. die reellen Zahlen als Individuen in einer ganz neuen Sprachform nehmen. Beim Aufbau auf der bisherigen Basis geht man entweder von den natürlichen Zahlen aus (**40a**) oder von den ganzen Zahlen (**40c**); dies hängt davon ab, ob man die weiteren Zahlarten nur innerhalb des positiven Gebietes verwenden will oder innerhalb des ganzen, positiven und negativen, Gebietes. Man kann zunächst die rationalen Zahlen als Paare von natürlichen bzw. ganzen Zahlen einführen, also durch Ausdrücke von der Form ‚*a*, *b*‘ bezeichnen. Dann kann man die reellen Zahlen als Klassen oder Funktionen von rationalen Zahlen einführen, also durch Prädikate oder Funktoren bezeichnen. Die komplexen Zahlen können als Paare von reellen Zahlen genommen werden.

Über die schrittweise Einführung weiterer Zahlarten, ausgehend von den natürlichen Zahlen, vgl. RUSSELL [Einführung] Kap. 7; WAISMANN [Math. Denken]; [Syntax] § 39; COOLEY [Logic] § 37.

Das zweite Verfahren besteht im Aufbau einer Sprachform, in der die reellen Zahlen als Individuen auftreten. Man kann hierbei z. B. die folgenden zusätzlichen Grundzeichen verwenden: ‚0‘ und ‚1‘ in der üblichen Bedeutung, die Funktoren ‚*sum*‘ (Summe) und ‚*prod*‘ (Produkt) und das zweistellige Prädikat ‚*Kl*‘ (Relation Kleiner). Der Aufbau ist ähnlich dem in **45** dargestellten Axiomensystem der reellen Zahlen von TARSKI. Da man hier als Individuen nur reelle Zahlen nimmt, ist das Prädikat ‚***R***‘ hier überflüssig. Man stellt sechzehn zusätzliche Grundsätze auf, nämlich die Axiome des genannten Systems mit Ausnahme von A5, A12, A10

und A18 (natürlich werden Alloperatoren für alle freien Variablen hinzugefügt und die Glieder mit ‚*R*‘ in A15 gestrichen).

Ausdrücke für reelle Zahlen sind besonders wichtig für den Aufbau einer Sprache der Physik. Hier werden jedem Raum-Zeit-Punkt vier reelle Zahlen als seine Koordinaten zugeordnet, drei als Raumkoordinaten, eine als Zeitkoordinate. Um Eigenschaften von Raum-Zeit-Punkten oder Relationen zwischen solchen oder physikalische Zustandsgrößen zu bezeichnen, verwendet man dann Prädikate und Funktoren mit einem oder mehreren Quadrupeln von reellen Zahlausdrücken als Argumentausdrücken (vgl. **41c**).

41. Quantitative Begriffe

41a. Quantitative Begriffe in Dingsprachen. Wir beobachten im Fortschritt der Wissenschaft auf den verschiedenen Gebieten eine immer stärkere Verwendung von quantitativen, zahlenmäßigen Begriffen zur Beschreibung der Dinge und Vorgänge. Die quantitative Beschreibungsmethode hat wesentliche Vorzüge vor der nicht-quantitativen, rein qualitativen. Zunächst erlaubt sie eine exaktere Beschreibung der einzelnen Tatsachen. Darüber hinaus ermöglicht sie es, viel wirksamer allgemeine Gesetze aufzustellen, die mit Hilfe mathematischer Funktionen Zusammenhänge zwischen den Werten verschiedener quantitativer Begriffe zum Ausdruck bringen. Quantitative Begriffe (z. B. Länge, Gewicht, Temperatur, Grad der Aufmerksamkeit, Preis) heißen auch Maßgrößen, weil das Verfahren zur Feststellung ihres Wertes das der Messung ist. Sie werden am besten durch Funktoren bezeichnet; und für ihre Wertausdrücke werden im allgemeinen am zweckmäßigsten reelle Zahlausdrücke genommen. (Man kann, um die Sprachform zu vereinfachen, unter Umständen auch rationale Zahlen oder sogar ganze Zahlen nehmen; doch ergeben sich dann wesentliche Beschränkungen für die Aufstellung von Gesetzen.)

Wir wollen die Verwendung quantitativer Begriffe zunächst in Dingsprachen behandeln und später in Koordinatensprachen. Für die Dingsprachen kommen hauptsächlich die in **39** erklärten Sprachformen in Betracht. Dabei werden als Argumentausdrücke der Funktoren hauptsächlich Ausdrücke für Dinge, Dingschichten oder Raum-Zeit-Punkte verwendet. Die wichtigste Art von Maßgrößen, die nicht nur in der Physik, sondern in allen quantitativ arbeitenden Zweigen der empirischen Wissenschaft, einschließlich der Psychologie und der Sozialwissenschaften, häufig vorkommt, umfaßt die Größen, die einem bestimmten Raum-Gebiet zu einer bestimmten Zeit, z. B. einer Dingschicht, eine reelle Zahl zuschreiben. Beispiele von Größen, die in dieser Form dargestellt werden können, sind: Temperatur, Energie, Masse, Gewicht, Intelligenz, Leistung in Mathematik (oder im Schachspiel, im Tennis usw.), Lebenserwartung und dergleichen. Wenn eine Messung oder die Durchführung einer Reihe von Testversuchen ergibt, daß Herr Schmidt heute ein so und so großes Gewicht hat, oder einen so und so hohen Blutdruck, oder so und so hoch

springen kann, oder so und so schnell Zahlen addieren kann, oder eine so und so große Fähigkeit zur Konzentration seiner Aufmerksamkeit besitzt oder dergleichen, so besagt das, daß einer Dingschicht von Herrn Schmidt eine bestimmte Zahl als Wert einer bestimmten Größe zugeschrieben wird.

41b. Formulierung von Gesetzen. Maßgrößen, wie z. B. Länge, Druck, Stromstärke und dergleichen, werden in der bei den Physikern üblichen, aber nicht ganz klaren Terminologie zuweilen Variable genannt. Nach der Terminologie der modernen Logik werden jedoch Zeichen, und nicht ihre Designate, in Variable und Konstanten eingeteilt. Hiernach wird jeder Begriff nicht durch eine Variable, sondern durch eine Konstante bezeichnet, und zwar sind die Maßgrößen durch Funktorkonstanten zu bezeichnen.

Außer diesen Funktorkonstanten kommen in den physikalischen Gesetzen auch Variable vor, wenigstens in der vollständigen Formulierung; denn die Gesetze sollen sich ja auf beliebige Raum-Zeit-Punkte oder -Gebiete beziehen. Gewöhnlich wird aber die vollständige Formulierung nicht angewendet, sondern eine abgekürzte, bei der die Variablen fortgelassen werden; ferner werden gewisse Bedingungen, unter denen das Gesetz gilt, in der symbolischen Formulierung fortgelassen und höchstens im begleitenden, erläuternden Worttext angegeben. So pflegt man z. B. das Gasgesetz in der Form ‚$p \cdot V = R \cdot T$' zu schreiben. Wenn wir die Bedingungen, denen ein System (eine Dingschicht einer Gasmenge) x genügen muß, damit das Gesetz anwendbar ist, mit ‚P' bezeichnen, so lautet die vollständige Formulierung: ‚$(x)[Px \supset p(x) \cdot V(x) = R(x) \cdot T(x)]$'. Hier zeigt sich, daß ‚p', ‚V' und ‚T' Funktoren, und zwar Konstanten, sind (nämlich für Druck, Volumen bzw. Temperatur). Die übliche abkürzende Schreibweise ist bequem und zweckmäßig; die Fortlassung der Variablen ist in gewisser Hinsicht analog der in der Schreibweise der Prädikate ohne Argumentausdrücke (28b). Der Charakter der zurückbleibenden Symbole als Funktoren darf aber dabei nicht übersehen werden. (Über eine andere Art der Ergänzung der üblichen physikalischen Gleichungen, bei der die Zeichen ‚p', ‚V' usw. als Variable genommen werden, aber ihre Deutung als Wert des Druckes usw. in den Bedingungssatz des Gesetzes aufgenommen wird, vgl. CARNAP [Foundations] § 23, Axiom A 1.)

An welcher Stelle und in welcher Weise soll die für eine Größe gewählte Maßeinheit (z. B. cm oder Zoll, Sekunde oder Tag, Mark oder Dollar) angegeben werden? In den natürlichen Sprachen ist es üblich, ein Zeichen für die Maßeinheit zu dem Zahlausdruck für den Wert der Größe hinzuzufügen (z. B. „Die Länge des Stabes a ist 5 cm", „Der Preis von a ist 5 DM"). Genau genommen gehört aber die Angabe der Maßeinheit in die Definition des Funktors, während der Wert stets eine reine Zahl ist. Wenn man in der Symbolisierung der Maßgröße die Einheit ausdrücklich angeben will, etwa weil innerhalb desselben Textes auf verschiedene Einheiten Bezug genommen wird, so muß das durch einen unabtrenn-

baren Bestandteil des Funktorzeichens geschehen, also am besten durch einen Index (z. B. für Länge: „$lg_{\text{cm}}(a) = 5$", „$lg_{\text{Zoll}}(a) = 2$"; hier ist ‚lg_{cm}' ein einziges Zeichen).

Beispiele. Wir wollen die folgenden Sätze übersetzen, und zwar für die verschiedenen Sprachformen von **39**. 1. „Peter war (oder ist oder wird sein) einmal schwerer als Herbert"; 2. „Die Energie eines isolierten Systems bleibt konstant". Dabei wollen wir die folgenden Zeichen verwenden (mit verschiedenem Typus, je nach den Argumenten). 1. Funktoren: ‚*gew*' bedeute Gewicht, ‚*energ*' Energie; 2. Prädikate: ‚*Gr*' bedeute Größer (für reelle Zahlen, vgl. **40d**), ‚*Isol*' isoliertes System.

Sprachformen I B und I C (I A ist für diese Beispiele nicht geeignet). 1. ‚$(\exists\, x)\ (\exists\, y)\ [Sch(x, pe)\ .\ Sch(y, he)\ .\ Glzg(x, y)\ .\ Gr(gew(x), gew(y))]$'. — 2. ‚$(x)\ (y)\ (z)\ [Isol(x)\ .\ Sch(y, x)\ .\ Sch(z, x) \supset energ(y) = energ(z)]$'. — Sprachform II A$\alpha$ und II Bα (die Änderung für Form β ist analog der in den Beispielen in **39c**). 1. ‚$(\exists\, x)\ (\exists\, y)\ [Pe(x)\ .\ He(y)\ .\ Glzg(x, y)\ .\ Gr(gew(x), gew(y))]$'. — 2. ‚$(F)\ (y)\ (z)\ [Isol\ (F)\ .\ Fy\ .\ Fz \supset energ\ (y) = energ\ (z)]$'. — Sprachform III A$\beta$ (III Aα ist hierfür nicht geeignet; die Änderung für III Aγ ist analog der in den Beispielen in **39d**). 1. ‚$(\exists\, F)\ (\exists\, G)\ [Pe(F)\ .\ He(G)\ .\ Glzg(F, G)\ .\ Gr(gew(F), gew(G))]$'. — 2. ‚$(N)\ (F)\ (G)\ [Isol(N)\ .\ N(F)\ .\ N(G) \supset energ(F) = energ(G)]$'.

41c. Quantitative Begriffe in Koordinatensprachen. Die Verwendung von Maßgrößen in Koordinatensprachen ist nicht wesentlich verschieden von der in Dingsprachen. Auch hier werden die Größen durch Funktoren bezeichnet. Form und Typus der Argumentausdrücke ist aber hier anders. Einem Raum-Zeit-Punkt entspricht hier ein Quadrupel von reellen Zahlausdrücken; zu welchem Typus diese Zahlausdrücke gehören, hängt dabei von der besondern Sprachform ab (vgl. **40d**). Schichten von Dingen, von Dingteilen und von sonstigen Systemen werden als Klassen von Raum-Zeit-Punkten dargestellt. Dies entspricht der Sprachform III in **39d**; daher ist hier eine analoge Unterteilung in Formen α, β, γ möglich. Hier dürfte die Form α am zweckmäßigsten sein: Dinge und sonstige physikalische Systeme werden ebenso wie ihre Schichten als Klassen von Raum-Zeit-Punkten dargestellt, also durch Prädikate bezeichnet, die ein Quadrupel von reellen Zahlausdrücken als Argumentausdruck annehmen. Die Funktoren für Maßgrößen haben dann entweder Prädikate der genannten Art oder Quadrupel der genannten Art als Argumentausdrücke, je nachdem, ob die Werte der betreffenden Größe einem Raum-Zeit-Gebiet oder einem Raum-Zeit-Punkt zugeschrieben werden sollen. In einer Koordinatensprache werden zweckmäßigerweise als Wertausdrücke für Funktoren auch zusammengesetzte Ausdrücke zugelassen, die aus mehreren reellen Zahlausdrücken bestehen. Während die Werte mancher physikalischer Größen reelle Zahlen sind (solche Größen heißen Skalare), sind die Werte anderer Größen (z. B. der räumlichen Vektoren) Tripel reeller Zahlen, die Werte wieder anderer Größen (z. B. der raumzeitlichen Vektoren) sind Quadrupel reeller Zahlen usw.

42. Die axiomatische Methode

42a. Axiome und Theoreme. Unter einem A x i o m e n s y s t e m (Abkürzung: ‚AS') versteht man die Darstellung einer Theorie in der Weise,

daß gewisse Sätze dieser Theorie, die Axiome, an den Anfang gestellt werden und weitere Sätze durch logische Deduktion aus ihnen abgeleitet werden. Die Axiome müssen so ausgewählt werden, daß alle übrigen Sätze der Theorie, die Theoreme, aus ihnen ableitbar sind. Nach der traditionellen Auffassung — von EUKLID bis in die Neuzeit — wurde außerdem verlangt, daß die Axiome evident sind, d. h. jedem ohne weiteres einleuchten und daher keines Beweises bedürfen. (Daher die Bedeutung, die das Wort ‚Axiom' noch heute in der Umgangssprache häufig hat.) Nach der modernen Auffassung wird dies nicht gefordert; beliebige Sätze können als Axiome genommen werden.

In den Theoremen dürfen auch Zeichen vorkommen, die in den Axiomen nicht vorkommen; jedoch nur dann, wenn sie definiert sind auf Grund der in den Axiomen vorkommenden Zeichen.

Nach moderner Auffassung soll die Ableitung der Theoreme eine rein logische Deduktion sein. In ihr darf also nicht etwa auf die Anschauung verwiesen werden — wie das bei Ableitungen im Euklidischen System früher üblich war — und keine Kenntnis der Gegenstände der Theorie darf verwendet werden außer der, die in den Axiomen ausgesprochen ist. Da die Ableitung in diesem Sinn rein logisch sein soll, ist es auch möglich, sie zu formalisieren. Man kann etwa die Axiome als zusätzliche Grundsätze einem logischen Kalkül anfügen; diesen nennen wir dann den Grundkalkül des AS. Die Theoreme sind dann die in dem erweiterten Kalkül beweisbaren Sätze, die nicht schon im Grundkalkül beweisbar sind. Die außer den logischen Zeichen des Grundkalküls in den Axiomen vorkommenden Zeichen nennen wir die axiomatischen Grundzeichen des AS. Die weiteren Zeichen des AS werden in dem Kalkül definiert auf Grund der Zeichen des Grundkalküls und der axiomatischen Grundzeichen.

Wir haben somit (auf Grund der modernen Auffassung) zwei Methoden zur Behandlung eines AS; sie sind jedoch nicht wesentlich verschieden, sondern nur in der Art der Darstellung. 1. Die Axiome sind nicht Grundsätze; die Theoreme werden durch Ableitungen gewonnen, wobei die Axiome als Prämissen auftreten. 2. Die Axiome sind Grundsätze; die Theoreme werden durch Beweise gewonnen, also ohne Prämissen. Über eine dritte Darstellungsweise s. unten (**42d** am Ende).

42b. Formalisierung und Symbolisierung; Modelle. In bezug auf den Aufbau der Sprache, in der ein AS formuliert wird, können weiter die folgenden Verfahren angewendet werden. Die Sprache kann formalisiert, d. h. als Kalkül dargestellt sein, mit ausdrücklich angegebenen formalen Regeln, nämlich Form- und Umformungsregeln (vgl. **21**, **22**). Ferner kann die Sprache symbolisiert sein, d. h. sie kann anstatt der Wörter einer natürlichen Sprache künstliche Symbole verwenden. Die beiden Verfahren müssen nicht unbedingt angewendet werden. Bei der Mehrzahl der veröffentlichten Darstellungen von ASen, auch auf Grund der modernen Auffassung, ist keines von beiden angewendet; die ASe sind in Wortsprache formuliert ohne Angabe von Umformungsregeln. Der Grundkalkül ist sozusagen stillschweigend vorausgesetzt: es wird an-

genommen, daß bekannt ist, wie man in der Wortsprache deduziert. Ferner wird auch eine bestimmte Deutung des Grundkalküls stillschweigend vorausgesetzt, nämlich die übliche Deutung der logischen Wörter der Wortsprache; nur die Deutung der axiomatischen Zeichen wird offengelassen. Die beiden vorhin genannten Verfahren sind unabhängig voneinander. Man kann auch eine Wortsprache formalisieren, indem man Umformungsregeln einführt, die sich auf die logischen Wörter ‚und', ‚oder', ‚nicht', ‚jedes' usw. beziehen anstatt auf die entsprechenden Symbole. Ferner kann man auch die Sprache teilweise oder ganz symbolisieren, ohne zu formalisieren, d. h. ohne syntaktische Umformungsregeln anzugeben; etwa so, wie wir es bei der Erklärung der Sprache A in Kapitel IA getan haben.

Das wesentliche Merkmal bei einer Axiomatisierung im modernen Sinn, ganz gleich in welcher der verschiedenen erwähnten Darstellungsformen, besteht darin, daß die Deduktion der Theoreme nicht von der Deutung der axiomatischen Zeichen Gebrauch macht. Darauf beruht die Möglichkeit, verschiedene Deutungen oder Modelle für dasselbe AS zu finden. Unter einer (wahren) Deutung eines AS (vgl. **26**) verstehen wir eine Deutung seiner Grundzeichen derart, daß bei ihr alle Axiome wahr sind; ist eine Deutung der Zeichen des Grundkalküls nicht entweder ausdrücklich oder stillschweigend angenommen, so muß die Deutung des AS auch eine Deutung dieser Zeichen enthalten. Durch die Deutung der axiomatischen Grundzeichen sind auch die übrigen axiomatischen Zeichen auf Grund ihrer Definitionen gedeutet, und daher auch alle Theoreme. Sind bei einer bestimmten Deutung alle Axiome wahr, so wissen wir, daß auch alle Theoreme wahr sind. Dies braucht nicht für jede Deutung und für jedes Theorem neu nachgewiesen zu werden, nachdem die Theoreme ein für allemal im ungedeuteten Kalkül deduziert (abgeleitet bzw. bewiesen) worden sind. Darin liegt der große Vorteil der mehrfachen Deutung eines AS. Unter einem Modell des AS versteht man eine Bewertung (**25a**) der axiomatischen Grundzeichen, also eine Zuordnung von Extensionen (z. B. Dingen, Klassen und dergleichen) als Werte der Grundzeichen derart, daß die Axiome bei der Auswertung auf Grund dieser Bewertung wahr werden. Jeder Deutung eines AS entspricht also ein bestimmtes Modell des AS. Man spricht von einer logischen Deutung, wenn alle axiomatischen Grundzeichen als logische Zeichen gedeutet werden; andernfalls von einer deskriptiven Deutung, also dann, wenn mindestens eines der axiomatischen Grundzeichen als deskriptives Zeichen gedeutet wird.

42c. Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit, Monomorphie. Wir wollen hier gewisse Eigenschaften erklären, die für die Beurteilung gegebener ASe wichtig sind. Ein AS heißt widerspruchsvoll, wenn es zwei Theoreme von der Form $\mathfrak{S}_i$ und $\sim \mathfrak{S}_i$ gibt; andernfalls widerspruchsfrei. Widerspruchsfreiheit ist offenbar erforderlich. Denn da aus $\mathfrak{S}_i$ und $\sim \mathfrak{S}_i$ jeder Satz ableitbar ist (L6—15), so umfassen die Theoreme eines widerspruchsvollen AS sämtliche Sätze der Sprache; ein solches AS ist daher trivial

und praktisch unbrauchbar. Die Widerspruchsfreiheit eines gegebenen AS wird durch die Konstruktion eines Modells nachgewiesen. Ein solcher Nachweis ist oft schwierig zu führen.

Ein AS heißt vollständig, wenn für jeden relevanten Satz $\mathfrak{S}_i$ (d. h. für jeden Satz, der außer den logischen Zeichen der vorausgesetzten Grundsprache nur axiomatische Zeichen des AS enthält) entweder $\mathfrak{S}_i$ selbst oder $\sim \mathfrak{S}_i$ ein Theorem ist. Wenn entweder die erforderliche Grundsprache oder das AS selbst hinreichende Ausdrucksmittel enthält, um die Arithmetik der natürlichen Zahlen einschließlich genereller Aussagen über Zahlen zu formulieren, so kann das AS nicht vollständig sein. (Dies folgt aus dem am Ende von **26** angedeuteten Ergebnis von Gödel.) Daher ist der Vollständigkeitsbegriff nicht häufig anwendbar. Dadurch gewinnt der im folgenden erklärte schwächere Begriff, der auch eine Art von Vollständigkeit bedeutet, an Interesse.

Ein AS heißt monomorph (oder kategorisch), wenn es widerspruchsfrei ist und alle seine Modelle miteinander isomorph sind. Der Begriff der Isomorphie von Modellen ist umfassender als der früher definierte Begriff der Isomorphie von Klassen oder Relationen (**19**). Das Modell M bestehe aus den Begriffen (oder Extensionen) $B_1, B_2, \ldots, B_n$ für die n axiomatischen Grundzeichen des Systems S; ein anderes Modell M' bestehe aus $B_1', \ldots, B_n'$. M heißt isomorph mit M', wenn es einen Korrelator zwischen den Individuen in M und denen in M' gibt derart, daß jedes B_p ($p = 1$ bis n) auf Grund dieses Korrelators isomorph im früheren Sinn mit B_p' ist. Wenn das AS dagegen nicht-isomorphe Modelle besitzt, so heißt es polymorph. Wenn ein AS monomorph ist, so besitzt es eine gewisse Vollständigkeit in dem Sinn, daß es alle strukturellen Eigenschaften möglicher Modelle festlegt. Beispiele monomorpher ASe: Peanos AS der natürlichen Zahlen (**44**; alle Modelle sind Progressionen und daher isomorph miteinander, L37—1a); Tarskis AS der reellen Zahlen (**45**; alle Modelle sind im wesentlichen stetige Reihen der Struktur ϑ und daher isomorph miteinander, L38—1d); einige moderne ASe der Euklidischen Geometrie, z. B. das von Hilbert, Grundlagen der Geometrie, und das von E. Roth (s. **47**).

42d. Der Explizitbegriff. Ist ein AS mit n axiomatischen Grundzeichen $\mathfrak{a}_{i_1}, \mathfrak{a}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{a}_{i_n}$ gegeben, so können wir es in folgender Weise in eine Aussage über die n Grundbegriffe umformen. Wir eliminieren zunächst alle definierten Zeichen. Dann bilden wir die Konjunktion $\mathfrak{S}_i$ aller Axiome (wobei jedes als offene Formel geschriebene Axiom durch Hinzufügung von Alloperatoren für alle freien Variablen in einen Satz umgeformt wird). In $\mathfrak{S}_i$ kommen außer logischen Konstanten und Variablen nur die n Grundzeichen vor. Daher können wir $\mathfrak{S}_i$ durch einen Satz von der Form $\mathfrak{a}_k(\mathfrak{a}_{i_1}, \mathfrak{a}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{a}_{i_n})$ abkürzen. $\mathfrak{a}_k$ ist ein n-stelliges Prädikat; es heißt das Explizitprädikat des AS, und das damit bezeichnete n-stellige Attribut heißt der Explizitbegriff des AS. Die Definition für $\mathfrak{a}_k$ ist offenbar in der folgenden Weise aufzustellen. Sie hat die Form $\mathfrak{a}_k(\mathfrak{v}_{i_1}, \mathfrak{v}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{v}_{i_n}) \equiv \mathfrak{S}_j$, wobei $\mathfrak{S}_j$ aus $\mathfrak{S}_i$ dadurch gebildet

wird, daß jedes Grundzeichen $\mathfrak{a}_{i_p}$ ($p = 1$ bis n) durch eine Variable $\mathfrak{v}_{i_p}$ desselben Typus ersetzt wird, und zwar an allen Stellen, an denen es in $\mathfrak{S}_i$ vorkommt, durch dieselbe Variable. $\mathfrak{S}_j$ besteht ganz aus Zeichen des Grundkalküls, da alle axiomatischen Zeichen beseitigt worden sind. Daher ist $\mathfrak{a}_k$ eine Konstante des Grundkalküls. Wenn, wie meist, der Grundkalkül als logisches System gedeutet wird, so ist $\mathfrak{a}_k$ eine logische Konstante. Der Explizitbegriff eines AS ist ein n-stelliges Attribut, das dann und nur dann für ein n-tupel von Begriffen gilt, wenn dieses das AS erfüllt. Der Explizitbegriff kann daher als die Klasse der Modelle des AS aufgefaßt werden.

Als Beispiel der Definition eines Explizitbegriffs s. die Definition D2* in **44b**. Es zeigt sich, daß der Explizitbegriff des PEANOschen AS der natürlichen Zahlen, in der Formulierung mit nur einem Grundzeichen, die Klasse der Progressionen ist (D37—1). Weitere Beispiele für Explizitprädikate von ASen: ‚*Kon*‘ in **43a** und **b**, ‚*Hausd*‘ in **46c**.

Wenn wir ein Theorem $\mathfrak{S}_k$ des AS in derselben Weise umformen — durch Binden der freien Variablen, Eliminieren der definierten axiomatischen Zeichen und Ersetzen der axiomatischen Grundzeichen durch die entsprechenden Variablen —, so erhalten wir eine offene Satzformel $\mathfrak{S}_l$. $\mathfrak{S}_k$ ist im Grundkalkül aus $\mathfrak{S}_i$ ableitbar. Daher ist der Allsatz $(\mathfrak{v}_{i_1})\,(\mathfrak{v}_{i_2})$ .. $(\mathfrak{v}_{i_n})\,[\mathfrak{S}_j \supset \mathfrak{S}_l]$ im Grundkalkül beweisbar und bei der üblichen Deutung dieses Kalküls logisch wahr.

Zu den beiden früher genannten Darstellungsformen eines AS tritt nun noch eine dritte: die Axiome und Theoreme werden nicht als Sätze formuliert, sondern als offene Satzformeln, die in der soeben beschriebenen Weise gebildet werden. An die Stelle der Ableitung bzw. des Beweises eines Theorems tritt hier der Beweis des soeben angegebenen universellen Implikationssatzes. Bei dieser Darstellungsweise werden keine andern Zeichen als die des Grundkalküls verwendet. Anstatt axiomatischer Grundzeichen, die Konstanten sind, haben wir hier axiomatische Variable. An Stelle der Deutung der ungedeuteten axiomatischen Konstanten tritt hier die Einsetzung von n Konstanten, die das Modell darstellen, für die n axiomatischen Variablen.

Über die axiomatische Methode vgl. HILBERT, Das axiomatische Denken, Math. Ann. 78, 405ff., 1918; FRAENKEL [Einleitung] § 18 (mit ausführlichen Literaturangaben); RUSSELL [Principles]; WOODGER [Biology] und [Theory construction] (besonders unter dem Gesichtspunkt der Anwendung in den Fachwissenschaften); TARSKI [Logik] Kap. VI, „Deduktive Methode"; CARNAP [Foundations].

42e. Die ASe in Teil II. In den folgenden Kapiteln werden verschiedene ASe dargestellt. Hierbei werden die in Teil I erklärten symbolischen Sprachen verwendet. Man kann dabei den früher angegebenen Kalkül B (**21**, **22**) als Grundkalkül annehmen; in diesem Fall ist das betreffende AS nicht nur symbolisiert, sondern auch formalisiert. Als Grundzeichen werden jeweils nur die axiomatischen Grundzeichen angegeben; für die übrigen axiomatischen Zeichen werden Definitionen aufgestellt. Zuweilen werden einige Theoreme als Beispiele angegeben. [Man beachte den Unterschied zwischen diesen Theoremen, die zu einer Objektsprache

gehören, und den Lehrsätzen, wie wir sie in Teil I aufgestellt haben, die zur Metasprache gehören, nämlich entweder zur Semantik oder zur Syntax.] Die ASe sind angeordnet auf Grund einer bestimmten Deutung, die jeweils angegeben wird; damit ist aber keineswegs gesagt, daß diese Deutung die einzig mögliche sei. Bei vielen Axiomen sind zwei Formulierungen angegeben; die mit ‚A' bezeichnete Formulierung gehört der einfachen Sprache A an und die mit ‚C' bezeichnete der erweiterten Sprache C. Wenn weder ‚A' noch ‚C' angegeben ist, gehört die Formulierung zu Sprache A. In einigen wenigen Fällen ist nur die Formulierung C gegeben, da die Formulierung A zu umständlich sein würde. Der Kürze wegen sind bei der Schreibung der Axiome und Theoreme die Allooperatoren, die sich auf die ganze Formel beziehen, weggelassen. Die Reihenfolge der ASe ist nach systematischen Gesichtspunkten bestimmt und nicht nach steigender Schwierigkeit. Daher ist es für den Lernenden ratsam, wenn er Beispielsysteme in Formulierung C lesen will, sie gemäß den geforderten Vorkenntnissen zu wählen: **44a** und **46b** können nach dem Studium von **32** gelesen werden; **43a**, **47** und **51a** nach **33**; **43b**, **52a**, **b** und **53a** nach **35**; **53b** und **54a** und **b** nach **36**; **44b**, **46a** und **51b** nach **37**; **45**, **48a—c** und **52c** nach **38**. In **46c** wird von der in **40** erläuterten Koordinatensprache Gebrauch gemacht; und **48d**, **49** und **50** verwenden einige in **46** eingeführte logische Begriffe.

B. Axiomensysteme (ASe) der Mengenlehre und Arithmetik

43. AS der Mengenlehre

Das im folgenden angegebene AS ist eine Modifikation des Systems von Fraenkel ([Grundlegung], vgl. [Einleitung] § 16). In Fraenkels System gilt Folgendes: (1) die Mengen sind nicht Klassen, sondern Individuen; (2) jedes Element einer Menge ist auch eine Menge; (3) es gibt keine andern Individuen als die Mengen. Wir behalten (1) und (2) bei, lassen aber (3) fallen; dadurch wird eine klarere Formulierung des Axioms der Beschränktheit möglich, s. unten A 9.

In der praktischen Anwendung ist eine Menge in der Mengenlehre im wesentlichen dasselbe wie eine Klasse in der Logik. Die logischen Regeln für die beiden Begriffe sind aber verschieden, da in dem vorliegenden AS und in den meisten ASen der Mengenlehre keine Typenunterscheidungen zwischen Mengen gemacht werden. Dieselben Variablen (nämlich ‚x', ‚y' usw.) werden für Mengen, Mengen von Mengen usw. verwendet. Dies ist der Sinn der obigen Aussage (1), daß die Mengen die Individuen dieses Systems sind. Zuweilen wird hier auch von einer Eigenschaft von Mengen gesprochen (z. B. in A 5, Variable ‚F'); es ist zu beachten, daß einer solchen Eigenschaft von Mengen nicht notwendig eine Menge entspricht (etwa die Menge derjenigen Mengen, die die betreffende Eigenschaft haben); ob eine Menge gewisser Art existiert, ist immer nur aus den Axiomen zu entnehmen. Die meisten Axiome sind Existenz-

aussagen; sie besagen, daß unter gewissen Umständen eine Menge existiert, die gewisse Bedingungen erfüllt.

Andere ASe der Mengenlehre: J. VON NEUMANN, Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, J. f. reine u. ang. Math. 154, 1925, Die Axiomatisierung der Mengenlehre, Math. Zeitschr. 27, 1928; P. BERNAYS, A system of axiomatic set theory, J. Symbolic Logic 2, 1937 und spätere Bände; K. GÖDEL, The consistency of the axiom of choice, etc., Annals of Math. Studies, No. 3, Princeton 1940.

43a. Erste Fassung, ohne Funktoren als Grundzeichen. Einziges Grundzeichen: ‚E'; ‚Exy' bedeutet: „Die Menge x ist Element der Menge y". Die Axiome und Definitionen werden in zwei Formulierungen gegeben, in Sprache A und Sprache C (vgl. 42e). Formulierung A dieses AS kann nach dem Studium von Kap. I A dieses Buches gelesen werden, Formulierung C nach dem Studium von Kap. I C bis 33.

Die Mengen sind die Glieder der Relation E:

D1. A. $Mx \equiv mem\,(E)\,x$.
C. $M = mem\,(E)$.

Teilmenge (analog zu Teilklasse):

D2. A. $Tm(x, y) \equiv Mx \,.\, My \,.\, (z)\,(Ezx \supset Ezy)$.
C. $Tm(x, y) \equiv Mx \,.\, My \,.\, (E\,(—, x) \subset E\,(—, y))$.

Mengen mit denselben Elementen sind identisch:

A1. A. $Tm(x, y) \,.\, Tm(y, x) \supset x = y$.
C. $Tm \,.\, Tm^{-1} \subset I$.

x ist eine (die) Paarmenge von y und z, wenn y und z die einzigen Elemente von x sind:

D3. A. $Pm\,(x, y, z) \equiv My \,.\, Mz \,.\, (u)\,(Eux \equiv (u = y) \vee (u = z))$.
C. $Pm\,(x, y, z) \equiv My \,.\, Mz \,.\, E\,(—, x) = \{y; z\}$.

Existenz einer Paarmenge von zwei gegebenen Mengen:

A2. $My \,.\, Mz \,.\, y \neq z \supset (\exists\, x)\, Pm(x, y, z)$.

x ist eine (die) Vereinigungsmenge von y, wenn die Elemente von x die Elemente der Elemente von y sind:

D4. A. $Vm(x, y) \equiv Mx \,.\, My \,.\, (u)\,[Eux \equiv (\exists\, z)\,(Euz \,.\, Ezy)]$.
C. $Vm(x, y) \equiv Mx \,.\, My \,.\, (E\,(—, x) = E^2\,(—, y))$.

‚$mem_2\,(E)$' bedeutet „die nicht-leeren Mengen"; ‚$init\,(E)$' (in Sprache C) „die leeren Mengen".

Existenz einer Vereinigungsmenge von einer nicht-leeren Menge:

A3. A. $mem_2\,(E)\,y \supset (\exists\, x)\, Vm(x, y)$.
C. $mem_2\,(E) \subset mem_2\,(Vm)$.

x ist eine (die) Potenzmenge von y, wenn die Elemente von x die Teilmenge von y sind:

D5. A. $Potm(x, y) \equiv My \,.\, (u)\,[Eux \equiv Tm(u, y)]$.
C. $Potm(x, y) \equiv (E\,(—, x) = Tm(—, y))$.

Existenz einer Potenzmenge:

A4. A. $(y)\,(\exists\, x)\,\mathit{Potm}(x, y)$.
C. $\exists\,(\mathit{Potm}\,(—, y))$.

Aussonderungsaxiom (in der einfachen Form, Fraenkel V). Für eine gegebene Menge y und eine beliebige Eigenschaft F gibt es eine Aussonderungsmenge x von y in bezug auf F, d. h. eine Menge x, deren Elemente diejenigen Elemente von y sind, die die Eigenschaft F haben:

A5. A. $(y)\,(F)\,[My \supset (\exists\, x)\,(u)\,[Mx\,.\,(Eux \equiv Euy\,.\,Fu)]]$.
C. $(y)\,(F)\,[My \supset (\exists\, x)\,(Mx\,.\,(E\,(—, x) = E\,(—, y)\,.\,F))]$.

x ist eine Auswahlmenge von y, wenn x mit jeder Menge, die ein Element von y ist, genau ein Element gemein hat:

D6. A. $\mathit{Auswm}\,(x, y) \equiv Mx\,.\,My\,.\,(z)\,[Ezy \supset .\,(\exists\, u)\,(v)\,(Evz\,.\,Evx \equiv v = u)]$.
C. $\mathit{Auswm}\,(x, y) \equiv Mx\,.\,My\,.\,(z)\,[Ezy \supset 1(E\,(—, z)\,.\,(E\,(—, x))]$.

Auswahlaxiom. Wenn y eine Menge ist, deren Elemente nicht-leere, sich gegenseitig ausschließende Mengen sind, so gibt es mindestens eine Auswahlmenge von y:

A6. A. $My\,.\,(z)\,(Ezy \supset \mathit{mem}_2\,(E)\,z)\,.\,(v)\,(w)\,(u)\,[Evy\,.\,Ewy\,.\,(Euv\,.\,Euw \supset v = w)] \supset (\exists\, x)\,\mathit{Auswm}\,(x, y)$.
C. $My\,.\,(E\,(—, y) \subset \mathit{mem}_2\,(E))\,.\,((E \mid E^{-1})\,.\,(E^{-1} \mid E) \subset I) \supset \exists\,(\mathit{Auswm}\,(—, y))$.

x ist eine (die) Einermenge von y:

D7. $\mathit{Ein}(x, y) \equiv \mathit{Pm}(x, y, y)$.

Unendlichkeitsaxiom. A7 besagt, daß es eine Menge z gibt derart, daß (1) jede leere Menge zu z gehört, und (2) wenn v zu z gehört, so auch jede Einermenge von v. Aus den andern Axiomen ergibt sich, daß es genau e i n e leere Menge gibt, und daß es zu jeder Menge genau e i n e Einermenge gibt. Somit enthält die besagte Menge z eine Progression von Elementen, nämlich die leere Menge, die Einermenge von dieser, die Einermenge der letzteren usf. Daher ist z eine unendliche Menge.

A7. A. $(\exists\, z)\,[Mz\,.\,(y)\,[My\,.\sim(\exists\, x)\,(Exy) \supset Eyz]\,.\,(v)\,(w)\,(Evz\,.\,\mathit{Ein}\,(w, v) \supset Ewz)]$.
C. $(\exists\, z)\,[Mz\,.\,(\mathit{init}(E) \subset E\,(—, z))\,.\,(\mathit{Ein}``E\,(—, z) \subset E(—, z))]$.

Axiom der Ersetzung (A8): Für jede Menge x und eine beliebige Funktion gibt es eine Menge y, die diejenigen Elemente besitzt, die den Elementen von x durch die Funktion zugeordnet sind. In diesem System wollen wir die Mengenfunktionen nicht durch Funktoren bezeichnen, sondern durch zweistellige Prädikate für voreindeutige Relationen (Variable ‚H').

A8. A. $(x)\,(H)\,[Mx\,.\,\mathit{Un}_1(H)\,.\,(z)\,(Ezx \equiv \mathit{mem}_2(H)z) \supset (\exists\, y)\,[My\,.\,(u)\,(Euy \equiv \mathit{mem}_1\,(H)\,u)]]$.
C. $(x)\,(H)\,[Mx\,.\,\mathit{Un}_1(H)\,.\,(\mathit{mem}_2\,(H) = E\,(—, x)) \supset (\exists\, y)\,[My\,.\,(E\,(—, y) = \mathit{mem}_1(H))]]$.

,*Kon*' wird definiert als Explizitprädikat (**42d**) für die Axiome A1 bis 8, so daß diese Axiome durch den Satz ,*Kon* (*E*)' zusammengefaßt werden können. Die Definition für ,*Kon*' kann leicht nach dem früher angegebenen Verfahren aufgestellt werden; dabei ersetzen wir ,*E*' durch die Variable ,*H*'. Da die Definition sehr lang ist, wollen wir hier nur ihren Anfang angeben:

D8. A. $Kon\ (H) \equiv (x)\ (y)\ [mem\ (H)\ x\ .\ mem\ (H)\ y\ .\ (z)\ (Hzx \equiv Hzy) \supset x = y]\ .\ (y)\ (z)\ [mem\ (H)\ y\ .\ mem\ (H)\ z\ .\ y \neq z \supset (\exists\ x)$ usw.
C. $Kon\ (H) \equiv (x)\ (y)\ [mem\ (H)\ x\ .\ mem\ (H)\ y\ .\ (H\ (—, x) = H\ (—, y)) \supset x = y]\ .\ (y)\ (z)$ usw.

Fraenkels Axiom der Beschränktheit formulieren wir als Minimal-Modell-Axiom (vgl. Carnap-Bachmann [Extrem.]) mit Hilfe des logischen Prädikates ,*Kon*': „Es gibt keine echte Teilrelation von *E*, die ebenfalls die in A1 bis 8 angegebenen Eigenschaften von *E* besitzt"; mit andern Worten: „Jede Teilrelation von *E*, die auch die Eigenschaft *Kon* besitzt, fällt mit *E* zusammen":

A9. A. $(H)\ [(x)\ (y)\ (Hxy \supset Exy)\ .\ Kon(H) \supset (x)\ (y)\ (Hxy \equiv Exy)]$.
B. $(H)\ [(H \subset E)\ .\ Kon(H) \supset (H = E)]$.

Durch diese Formulierung sind Fraenkels Zweifel, ob das Axiom sich überhaupt einwandfrei formulieren läßt, behoben.

43b. Zweite Fassung, mit Funktoren als Grundzeichen. Diese Fassung hat den Vorteil, daß jede Menge, deren Existenz aus dem AS nachweisbar ist, tatsächlich definiert werden kann. 8 Grundzeichen: ,*E*', ,*nu*', ,*pm*', ,*vm*', ,*potm*', ,$auss_1$', ,$auss_2$', ,*ers*'. Das erste entspricht dem Grundprädikat der ersten Fassung, das zweite ist eine Individualkonstante, die übrigen sechs sind Funktoren von verschiedenen Typen. ,*nu*' bezeichnet eine leere Menge; aus den Axiomen folgt dann, daß es die einzige leere Menge, also die Nullmenge, ist. $pm(x, y)$ ist die Paarmenge von x und y; $vm(x)$ die Vereinigungsmenge von x; $potm(x)$ die Potenzmenge von x; $auss_1\ (x, f, g)$ bzw. $auss_2\ (x, f, g)$ ist die Aussonderungsmenge erster bzw. zweiter Art von x in bezug auf die Mengenfunktionen f und g, d. h. die Menge derjenigen Elemente z von x, für die $f\ (z)$ ein Element bzw. nicht ein Element von $g\ (z)$ ist (als Variable für Mengenfunktionen nehmen wir hier Funktorvariable ,*f*' und ,*g*'); $ers\ (x, f)$ ist die Ersetzungsmenge von x in bezug auf die Mengenfunktion f, d. h. die Menge, zu der für jedes Element u von x $f(u)$ gehört und sonst nichts. Da in der ursprünglichen Fassung des AS die Existenz genau einer Paarmenge von x und y, genau einer Vereinigungsmenge von x usw. nachweisbar ist, so ist die Einführung von entsprechenden Funktoren als Grundzeichen gerechtfertigt. Die entsprechenden Existenzsätze brauchen nun nicht mehr als Axiome aufgestellt zu werden; sie sind mit Hilfe der Funktoren unmittelbar beweisbar, da ja die betreffende Menge stets durch einen Vollausdruck eines der Grundfunktoren darstellbar ist. Wir brauchen aber jetzt ein Axiom, das die Beziehung zwischen $pm\ (x, y)$ und x und y ausdrückt,

und analoge Axiome für die andern Grundfunktoren. Die Einführung von ‚*nu*' ist dadurch gerechtfertigt, daß in der ersten Fassung die Existenz genau einer leeren Menge nachweisbar ist. (Das folgende AS ist lesbar in Formulierung A nach **18**, in Formulierung C nach **35**).

D1* für ‚*M*' lautet wie D1 (**43a**);

D2* für ‚*Tm*' wie D2;

D3* für ‚*Auswm*', wie D6; **A1*** wie A1.

Axiom der Paarmenge:

A2*. $E(u, pm(y, z)) \equiv My \,.\, Mz \,.\, (u = y \vee u = z)$.

Axiome der Vereinigungsmenge:

A3*. A. $E(u, vm(y)) \equiv (\exists z)(Euz \,.\, Ezy)$.
C. $E(—, vm(y)) = E^2(—, y)$.

A4*. A. $Mx \supset M(vm(x))$.
C. $vm``M \subset M$.

A4* besagt, daß die Vereinigungsmenge einer Menge auch eine Menge ist (analoge Sätze für Paarmenge und Potenzmenge sind beweisbar, daher nicht als Axiome nötig; für die Aussonderungsmenge erster Art wird A7* aufgestellt; für die zweiter Art und für die Ersetzungsmenge wird ein derartiger Satz nicht benötigt).

Axiom der Potenzmenge:

A5*. A. $E(u, potm(y)) \equiv Tm(u, y)$.
C. $E(—, potm(y)) = Tm(—, y)$.

Aussonderungsaxiome (verschärfte Fassung, Fraenkels V'):

A6*. $E(z, auss_1(u, f, g)) \equiv Ezu \,.\, E(f(z), g(z))$.

A7*. $Mu \supset M(auss_1(u, f, g))$.

A8*. $E(z, auss_2(u, f, g)) \equiv Ezu \,.\, \sim E(f(z), g(z))$.

Auswahlaxiom **A9*** lautet wie A6.

Mit Hilfe der Grundfunktoren können in diesem System weitere Funktoren definiert werden. Beispiel: ‚*ein*'; *ein* (x) ist die Einermenge von x:

D4*. $ein(x) = pm(x, x)$.

Axiom der Nullmenge:

A10*. A. $\sim (\exists x) E(x, nu)$.
C. $\sim mem_2(E)(nu)$.

A 10* ist bequem, aber nicht unentbehrlich. Man könnte nämlich anstatt des Namens der Nullmenge eine beliebige andere Individualkonstante als Grundzeichen nehmen, etwa ‚*a*', für die kein dem A 10* entsprechendes Axiom aufgestellt wird, sondern nur A 10': ‚*Ma*'. (In dem System mit ‚*nu*' ist T 1* ‚*M*(*nu*)' mit Hilfe von A 7* und A 10* oder auch von A 11* beweisbar, braucht also nicht als Axiom aufgestellt zu werden.) Dann kann in folgender Weise ‚*nu*' so definiert werden, daß der Satz A 10* beweisbar wird. Man definiert zunächst den Identitätsfunktor ‚*id*' durch D 8': ‚$id(x) = x$', und dann ‚*nu*' durch D 9': ‚$nu = auss_2(a, id, id)$'. Ein Theorem T 2', gleich-

lautend mit A 10* ist dann leicht beweisbar mit Hilfe von A 8*, wenn man hierin für ,*u*' ,*z*' und für ,*f*' und für ,*g*' ,*id*' einsetzt. — Falls Definitionen durch Kennzeichnung zugelassen werden (vgl. Bemerkung am Ende von **35,** **nur in** Sprachform C möglich), kann man auch ganz ohne Individualkonstante als Grundzeichen auskommen. In diesem Fall braucht man ein Axiom für die Existenz irgend einer Menge, A 10†: ,$\exists$ (mem_1 (*E*))'. Dann ist T 2†: 1 (*init* (*E*))' beweisbar. Und dies berechtigt zu der Definition D 9†: ,*nu* = (ι *x*) (*init* (*E*) *x*)'.

Unendlichkeitsaxiom:

A 11*. A. $(\exists z)\ [E(nu, z) \,.\, (v)\ (Evz \supset E(ein(v), z))]$.
C. $(\exists z)\ [E(nu, z) \,.\, (ein``E\ (—, z) \subset E(—, z))]$.

Axiom der Ersetzung: Ist *f* eine Funktion, deren Werte für alle Elemente der Menge *x* Mengen sind, so sind alle und nur die Werte von *f* für Elemente von *x* Elemente von *ers* (*x*, *f*):

A 12*. A. $(v)\ [E(v, x) \supset M(f(v))] \supset (u)\ [Eux \equiv E(f(u), ers(x, f))]$.
B. $(f``E(—, x) \subset M) \supset (f``E(—, x) = E(—, ers(x, f)))$.

,*Kon*' sei das Explizitprädikat für A 1* bis A 12*. Da wir bei dieser Fassung 8 Grundzeichen haben, so ist ,*Kon*' hier ein achtstelliges Prädikat. ,*Kon* (*E*, *nu*, *pm*, .., *ers*)' ist dann eine Zusammenfassung für A 1* bis A 12*. In der Definition für ,*Kon*' ersetzen wir die Grundzeichen durch 8 Variable entsprechender Typen: ,*H*', ,*t*', ,f_1', ,f_2', .., ,f_6'; ,f_1' bis ,f_6' sind Funktorvariable. Wir geben hier wieder nur den Anfang der Definition:

D 5*. $Kon\ (H, t, f_1, f_2, .., f_6) \equiv (x)\ (y)\ [mem(H)\ x \,.\, mem(H)\ y \,.\, (z)\ (Hzx \equiv Hzy) \supset x = y] \,.\, (u)\ (y)\ (z)\ [H(u, f_1(y, z) \equiv mem(H)\ y$ usw.

Axiom der Beschränktheit, formuliert als Minimal-Modell-Axiom. (Die Teilrelation zwischen Modellen bezieht sich nur auf die Grundattribute, hier also nur auf *E*; Grundindividuen, hier *nu*, und Grundfunktionen, hier *pm*, *vm*, .., *ers* sind dabei identisch.)

A 13*. A. $(H)\ [(x)\ (y)\ (Hxy \supset Exy) \,.\, Kon\ (H, nu, pm, vm, potm, auss_1, auss_2, ers) \supset (x)\ (y)\ (Hxy \equiv Exy)]$.
C. $(H)\ [(H \subset E) \,.\, Kon\ (H, nu, pm, .., ers) \supset (H = E)]$.

44. Peanos AS der natürlichen Zahlen

44a. Erste Fassung, die ursprüngliche Form. (Peano [Formulaire] II, § 2: Arithmétique, 1898, S. 1f.; Russell [Einführung] 5.) Formulierung A ist lesbar nach **18**, C nach **32**. Drei Grundzeichen: ,*nu*', ,*Z*', ,*nf*'. ,*nu*' ist eine Individualkonstante, ,*Z*' ein einstelliges Prädikat, ,*nf*' ein einstelliger Funktor. Übliche Deutung: ,*nu*' bezeichnet die Zahl 0; ,*Zx*': „*x* ist eine (natürliche) Zahl"; ,*nf* (*x*)': „der Nachfolger von *x*".

0 ist eine Zahl:

A 1. $Z(nu)$.

Der Nachfolger einer Zahl ist eine Zahl:

A2. A. $Zx \supset Z(nf(x))$.

C. $nf``Z \subset Z$.

Zahlen mit demselben Nachfolger sind identisch:

A3. $Zx \,.\, Zy \,.\, nf(x) = nf(y) \supset x = y$.

Null ist nicht Nachfolger irgend einer Zahl:

A4. A. $Zx \supset nf(x) \neq nu$.

C. $\sim (nf``Z)\,(nu)$.

A5 ist das Prinzip der mathematischen („vollständigen") Induktion (vgl. **37c**). Wenn die Eigenschaft F die folgenden beiden Bedingungen erfüllt: (1) Null ist F, (2) wenn irgend eine Zahl F ist, so auch ihr Nachfolger, dann ist jede Zahl F.

A5. A. $(F)\,[F(nu) \,.\, (x)\,(Fx \supset F(nf(x))) \supset (y)\,(Zy \supset Fy)]$.

C. $(F)\,[F(nu) \,.\, (nf``F \subset F) \supset (Z \subset F)]$.

44b. Zweite Fassung, nur ein Grundzeichen: Das zweistellige Prädikat ‚V'. Deutung: unmittelbarer Vorgänger in der Reihe der natürlichen Zahlen. (Russell [Einführung] 7, [P. M.] II, 245.) (Formulierung A ist lesbar nach **18**, C nach **37**.)

Die Zahlen sind die V-Glieder:

D1*. A. $Zx \equiv mem(V)\, x$.

C. $Z = mem(V)$.

V ist eineindeutig:

A1*. A. $(Vxz \,.\, Vyz \supset x = y) \,.\, (Vxy \,.\, Vxz \supset y = z)$.

C. $Un_{1,2}(V)$.

V hat genau ein Anfangsglied:

A2*. A. $(\exists\, x)\,(y)\,[Zy \,.\, \sim (\exists\, z)\,(Vzy) \equiv (y = z)]$.

C. $1(init(V))$.

Wenn in Sprache C Definitionen durch Kennzeichnung zugelassen werden (vgl. Bemerkung am Ende von **35**), so können wir auf Grund von A2* die Zahl Null definieren durch D3* (C): ‚$nu = (\imath\, x)\,(init\,(V)\, x)$'.

Jede Zahl ist Vorgänger von etwas; V hat kein Endglied:

A3*. A. $Zx \supset (\exists\, y)\, Vxy$.

C. $Z \subset mem_1\,(V)$.

Jedes Glied von V ist von einem Anfangsglied aus in endlich vielen V-Schritten erreichbar; d. h. jedes Glied von V besitzt jede V-erbliche Eigenschaft (vgl. **36a**) irgend eines Anfangsgliedes:

A4*. A. $(x)\,(y)\,(F)\,[Zx \,.\, \sim (\exists\, z)(Vzx) \,.\, Zy \,.\, Fx \,.\, (u)(v)(Fu \,.\, Vuv \supset Fv) \supset Fy]$.

C. a. $init\,(V)\, x \,.\, Zy \supset V^{\geqq 0}\,(x, y)$, oder noch kürzer:

b. $Z \subset (V^{\geqq 0})^{-1}\, ``(init(V))$.

Definition des **Explizitbegriffes** M dieses AS (in Formulierung C). Wir bilden das Definiens in der folgenden Weise, nach dem in **42d** angegebenen Verfahren. Wir eliminieren in den Axiomen ‚Z' auf Grund von D1*, ersetzen die Grundkonstante ‚V' durch die Variable ‚H' und bilden die Konjunktion.

D2*. C. $M(H) \equiv Un_{1.2}(H) \,.\, 1(init(H)) \,.\, (mem\,(H) \subset mem_1\,(H)) \,.\, (mem\,(H) \subset (H^{\geqq 0})^{-1}\text{``}\,(init\,(H)))$.

M ist nach dieser Definition die Klasse der Relationen, die die Axiome A1* bis 4* erfüllen.

Nehmen wir ein einfaches Beispiel eines Theorems: V ist asymmetrisch:

T1*. C. $As\,(V)$.

Diesem Theorem entspricht die offene Satzformel ‚$As\,(H)$' und somit der folgende universelle Implikationssatz: ‚$(H)\,[M(H) \supset As(H)]$'; er besagt: Jede Relation, die die vier Axiome erfüllt, ist asymmetrisch. Dieser Satz ist in Sprache C, die hier als Grundsprache dient, beweisbar und bei der üblichen Deutung dieser Sprache ein L-wahrer Satz.

Das Definiens von ‚M' läßt sich leicht in das von ‚$Prog$' (D37—1) umformen. ‚M' und ‚$Prog$' sind also gleichbedeutend; die Modelle des vorstehenden AS sind die Progressionen; der Explizitbegriff dieses AS ist die Klasse der Progressionen.

45. AS der reellen Zahlen

Dieses AS stammt von Tarski [Logik] § 58. Es ist auch in Cooley [Logic] § 36 angegeben. Das AS hat sechs Grundzeichen, nämlich zwei Prädikate: ‚R' (reelle Zahl) und ‚K' (Relation Kleiner); zwei zweistellige Funktoren: ‚su' (Summe) und ‚$prod$' (Produkt); und zwei Zahlzeichen (Individualkonstanten): ‚0' und ‚1'. Tarski weist darauf hin, daß die Axiome nicht unabhängig voneinander sind (d. h. einige sind aus den übrigen ableitbar und daher, theoretisch genommen, überflüssig). Er gibt auch ein anderes AS an (§ 57), das erheblich kürzer ist, aber die Ableitung von Theoremen weit komplizierter macht. (Das folgende AS ist in Formulierung A nach **18** lesbar, in Formulierung C nach **38**.)

Das erste AS für reelle Zahlen wurde von Hilbert aufgestellt (Über den Zahlbegriff, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, 8, 1900, später abgedruckt im Anhang von: Grundlagen der Geometrie).

Von zwei verschiedenen Zahlen ist eine kleiner als die andere:

A1. A. $x \neq y \supset Kxy \vee Kyx$.
C. $Connex\,(K)$. (Vgl. **31b**.)

K ist asymmetrisch:

A2. A. $Kxy \supset \sim Kyx$.
C. $As\,(K)$.

K ist transitiv:

A3. A. $Kxy \,.\, Kyz \supset Kxz$.
C. $Trans\,(K)$.

K ist eine DEDEKINDsche Relation (38b) ohne Anfangsglied und ohne Endglied:

A4. A. $(x)\,(y)\,[Fx \,.\, Gy \supset Kxy] \supset (\exists\, z)\,[(x)\,(Fx \,.\, x \neq z \supset Kxz) \,.$
$(y)\,(Gy \,.\, y \neq z \supset Kzy)]$.
C. $Ded_{00}\,(K)$.

Die Summe zweier Zahlen ist eine Zahl:

A5. $Rx \,.\, Ry \supset R(su(x, y))$.

Die Summe ist kommutativ:

A6. $su(x, y) = su(y, x)$.

Die Summe ist assoziativ:

A7. $su(x, su(y, z)) = su(su(x, y), z)$.

Existenz der Differenz zweier Zahlen:

A8. $Rx \,.\, Ry \supset (\exists\, z)\,(Rz \,.\, x = su(y, z))$.

[COOLEY nimmt hier das einfachere Axiom ‚$Rx \supset (\exists\, z)\,(Rz \,.\, su(x, z) = 0)$'.]

Monotonie der Summe:

A9. $Kyz \supset K(su(x, y), su(x, z))$.

0 ist eine Zahl:

A10. $R(0)$.

$x + 0 = x$:

A11. $su(x, 0) = x$.

Das Produkt zweier Zahlen ist eine Zahl:

A12. $Rx \,.\, Ry \supset R(prod(x, y))$.

Das Produkt ist kommutativ:

A13. $prod(x, y) = prod(y, x)$.

Das Produkt ist assoziativ:

A14. $prod(x, prod(y, z)) = prod(prod(x, y), z)$.

Existenz des Quotienten:

A15. $Rx \,.\, Ry \,.\, y \neq 0 \supset (\exists\, z)\,(Rz \,.\, x = prod(y, z))$.

Monotonie des Produkts:

A16. $K(0, x) \,.\, K(y, z) \supset K(prod(x, y), prod(x, z))$.

Das distributive Gesetz:

A17. $prod(x, su(y, z)) = su(prod(x, y), prod(x, z))$.

1 ist eine Zahl:

A18. $R(1)$.

$x \,.\, 1 = x$:

A19. $prod(x, 1) = x$.

A20. $0 \neq 1$.

C. ASe der Geometrie

46. AS der Topologie (Umgebungsaxiome)

Das folgende AS ist aufgestellt nach HAUSDORFF [Grundzüge] 213ff. Den Elementen, genannt Punkten, werden gewisse Klassen von Punkten als Umgebungen zugeordnet. Ein solches Umgebungssystem bildet einen topologischen Raum.

46a. Erste Fassung. Grundzeichen: Prädikat ‚*Um*'. ‚*Um* (*F*, *x*)' bedeutet: „die Punktklasse *F* ist eine Umgebung des Punktes *x*". (Formulierung A (ohne D12) ist lesbar nach **19**, C nach **37**.)

Die Punkte sind die Zweitglieder von *Um*:

D1. A. $Px \equiv mem_2\,(Um)\; x$.
C. $P = mem_2\,(Um)$.

Die Umgebungen (‚*Umg*') sind die Erstglieder von *Um*:

D2. A. $Umg\,(F) \equiv mem_1\,(Um)\,(F)$.
C. $Umg = mem_1\,(Um)$.

Die Punktklassen:

D3. A. $PK\,(F) \equiv (z)\,(Fz \supset Pz)$.
C. $PK = sub_1\,(P)$.

Jede Umgebung ist eine Klasse von Punkten:

A1. A. $Umg\,(F) \supset PK(F)$.
C. $Umg \subset PK$.

Jede Umgebung von *x* enthält *x*:

A2. $Um\,(F, x) \supset Fx$.

Sind F_1 und F_2 Umgebungen von *x*, so gibt es eine Umgebung von *x*, die Teilklasse von F_1 und von F_2 ist:

A3. A. $Um\,(F_1, x) \,.\, Um\,(F_2, x) \supset (\exists\, G)\,[Um\,(G, x) \,.\, (y)\,(Gy \supset F_1 y \,.\, F_2 y)]$.
C. $Um\,(F_1, x) \,.\, Um\,(F_2, x) \supset (\exists\, G)\,[Um\,(G, x) \,.\, (G \subset F_1 \,.\, F_2)]$.

Liegt *y* in der Umgebung *F* von *x*, so gibt es eine Umgebung *G* von *y*, die Teilklasse von *F* ist:

A4. A. $Umg\,(F) \,.\, Fy \supset (\exists\, G)\,[Um\,(G, y) \,.\, (z)\,(Gz \supset Fz)]$.
C. $Umg\,(F) \,.\, Fy \supset (\exists\, G)\,[Um\,(G, y) \,.\, (G \subset F)]$.

Für zwei verschiedene Punkte gibt es Umgebungen ohne gemeinsamen Punkt:

A5. A. $Px \,.\, Py \,.\, (x \neq y) \supset (\exists\, F)\,(\exists\, G)\,[Um\,(F, x) \,.\, Um\,(G, y) \,.\, \sim (\exists\, z)\,(Fz \,.\, Gz)]$.
C. $Px \,.\, Py \,.\, (x \neq y) \supset (\exists\, F)\,(\exists\, G)\,[Um\,(F, x) \,.\, Um\,(G, y) \,.\, \sim \exists\,(F \,.\, G)]$.

Die weiteren Begriffe der Topologie (Punktmengenlehre) können auf Grund von ‚*Um*' definiert werden. Hier einige Beispiele: ein zur Klasse *F*

gehörender Punkt x heißt innerer Punkt von F, wenn eine Teilklasse von F Umgebung von x ist; sonst Randpunkt von F:

D4. A. $Inn(x, F) \equiv PK(F) \, . \, (\exists G) \, [Um(G, x) \, . \, (z)(Gz \supset Fz)]$.
C. $Inn(x, F) \equiv PK(F) \, . \, \exists \, (Um \, (—, x) \, . \, sub_1(F))$.

D5. $Rp(x, F) \equiv PK(F) \, . \, Fx \, . \sim Inn \, (x, F)$.

Die Punktklassen ohne Randpunkte heißen Gebiete:

D6. A. $Geb(F) \equiv PK(F) \, . \sim (\exists x) \, Rp \, (x, F)$.
C. $Geb = PK \, . \sim mem_2 \, (Rp)$.

Die Punktklassen ohne innere Punkte heißen Randmengen:

D7. A. $Rdm(F) \equiv PK(F) \, . \sim (\exists x) \, Inn \, (x, F)$.
C. $Rdm = PK \, . \sim mem_2 \, (Inn)$.

Theoreme. Der ganze Raum (d. h. die Klasse aller Punkte) ist ein Gebiet (T1). Jede Umgebung ist ein Gebiet (T2):

T1. $Geb(P)$.

T2. A. $Umg(F) \supset Geb(F)$.
C. $Umg \subset Geb$.

Unter dem Komplement von F versteht man die Klasse der Punkte, die nicht zu F gehören (‚*kpl*‘ ist ein Funktor zweiter Stufe):

D8. A. $kpl(F) \, x \equiv Px \, . \sim Fx$.
C. $kpl(F) = P \, . \sim F$.

x heißt ein Grenzpunkt von F, wenn x ein Randpunkt von F oder vom Komplement von F ist:

D9. $Grp(x, F) \equiv Rp(x, F) \vee Rp(x, kpl(F))$.

x heißt ein Berührungspunkt (‚*Ber*‘) bzw. ein Häufungspunkt (‚*Hf*‘) bzw. ein Verdichtungspunkt (‚*Verd*‘) von F, wenn in jeder Umgebung von x mindestens ein Punkt von F liegt bzw. unendlich viele Punkte von F bzw. mehr als abzählbar viele Punkte von F:

D10. A. $Ber(x, F) \equiv (G) \, [Um(G, x) \supset (\exists y) \, (Gy \, . \, Fy)]$.
C. $Ber(x, F) \equiv (G) \, [Um(G, x) \supset \exists \, (G \, . \, F)]$.

D11. A. $Hf(x, F) \equiv (G_1) \, [Um(G_1, x) \supset (\exists G_2) \, (\exists G_3) \, [(z) \, (G_3 z \supset G_2 z) \, .$
$(\exists y) \, (G_2 z \, . \sim G_3 z) \, . \, Is_1(G_3, G_2) \, . \, (z) \, (G_2 z \supset G_1 z \, . \, Fz)]]$.
C. $Hf \, (x, F) \equiv (G) \, [Um \, (G, x) \supset ClsRefl \, (F \, . \, G)]$.

D12. C. $Verd(x, F) \equiv (G) \, [Um(G, x) \supset (ClsRefl \, . \sim \aleph_0)(F . G)]$.

(Formulierung A von D12 kann mit Hilfe von D37—7 (wie soeben in D11 A), D37—2, D37—1 und weiteren Definitionen gebildet werden, wird aber sehr lang und unübersichtlich.)

x heißt ein isolierter Punkt der Punktklasse F, wenn x zu F gehört, aber nicht Häufungspunkt von F ist:

D13. $Isol \, (x, F) \equiv PK(F) \, . \, Fx \, . \sim Hf \, (x, F)$.

46b. Zweite Fassung. Grundzeichen: Funktor ‚*um*'; *um* (x) ist die Klasse der Umgebungen von x. (Formulierung A ist lesbar nach **18**, C nach **32**.)

D1*. $Px \equiv (\exists F)\,[um(x)(F)]$.

D2*. $Umg\,(F) \equiv (\exists x)\,[um(x)(F)]$.

D3* für ‚*PK*' wie D3.

A1* wie A1.

A2*. $um(x)(F) \supset Fx$.

A3*. A. $um\,(x)\,(F_1)\,.\,um\,(x)\,(F_2) \supset (\exists G)\,[um\,(x)\,(G)\,.\,(y)\,(Gy \supset F_1 y\,.\,F_2 y)]$.
C. $um\,(x)\,(F_1)\,.\,um\,(x)\,(F_2) \supset (\exists G)\,[um\,(x)\,(G)\,.\,(G \subset F_1\,.\,F_2)]$.

A4*. A. $Umg(F)\,.\,Fy \supset (\exists G)\,[um(y)(G)\,.\,(z)\,(Gz \supset Fz)]$.
C. $Umg(F)\,.\,Fy \supset \exists\,(um(y)\,.\,sub_1(F))$.

A5*. A. $Px\,.\,Py\,.\,x \neq y \supset (\exists F)\,(\exists G)\,[um(x)(F)\,.\,um(y)(G)\,.\,\sim(\exists z)\,(Fz\,.\,Gz)]$.
C. $Px\,.\,Py\,.\,x \neq y \supset (\exists F)\,(\exists G)\,[um(x)(F)\,.\,um(y)(G)\,.\,\sim \exists\,(F\,.\,G)]$.

46c. Definition logischer Begriffe. (In Formulierung C, lesbar nach **40**.) Wir definieren zunächst den Explizitbegriff (**42**) für das HAUSDORFFsche AS, auf Grund der ersten Fassung (**46a**). ‚*Hausd*(L)' besagt: „Die Relation L (zweiter Stufe, zwischen Klassen und Individuen) erfüllt das HAUSDORFFsche AS", mit andern Worten: „L ist ein (HAUSDORFFsches) Umgebungssystem". Daran schließen wir Definitionen weiterer logischer Begriffe, die zum Begriff der Dimensionszahl führen (im Anschluß an KARL MENGER, Dimensionstheorie, 1928, S. 77ff., vgl. What is dimension? American Math. Monthly, 50, 1943). Die folgenden Definitionen formulieren wir nur in Sprache C; in Sprache A würden sie sehr lang und umständlich werden.

D16. C. $Hausd(L) \equiv (mem_1(L) \subset sub_1(mem_2(L)))\,.\,(F)\,(x)\,(L\,(F, x) \supset Fx)\,.\,(F_1)\,(F_2)\,(x)\,[L(F_1, x)\,.\,L(F_2, x) \supset (\exists G)\,[L(G, x)\,.\,(G \subset F_1\,.\,F_2)]]\,.\,(F)\,(y)\,[mem_1\,(L)(F)\,.\,Fy \supset \exists\,(L\,(—, y)\,.\,sub_1(F))]\,.\,(x)\,(y)\,[mem_2(L)\,x\,.\,mem_2(L)\,y\,.\,x \neq y \supset (\exists F)\,(\exists G)\,[L(F, x)\,.\,L(G, y)\,.\sim \exists\,(F\,.\,G)]]$.

Dem axiomatischen Prädikat ‚*Hf*' (D11) entspricht das logische Prädikat ‚*Hfp*'. ‚*Hfp* (x, F, L)' besagt: „x ist Häufungspunkt von F in bezug auf das Umgebungssystem L". Die folgenden Begriffe beziehen sich alle auf ein Umgebungssystem L.

D17. C. $Hfp(x, F, L) \equiv Hausd(L)\,.\,(G)\,[L(G, x) \supset ClsRefl(F\,.\,G)]$.

Die Begrenzung einer Klasse F in bezug auf L (‚*begr* (F, L)') ist die Klasse der Häufungspunkte von F in bezug auf L, die nicht zu F gehören:

D18. C. $begr(F, L)\,x \equiv Hfp(x, F, L)\,.\sim Fx$.

Für die weiteren Definitionen erweitern wir die Sprache durch Hinzufügung eines zweiten Individuentypus. (Wir erhalten also eine zweisortige Sprache, vgl. **21c**.) Neben dem Typus der Gegenstände, zu denen auch die Punkte gehören, mit den Variablen ‚*x*', ‚*y*' usw., stellen wir den Typus der ganzen Zahlen, mit den Variablen ‚*m*', ‚*n*' usw. Hierfür verwenden wir die in **40c** erklärte Sprachform, mit den zusätzlichen Grundzeichen ‚0', ‚′', ‚*K*' und ‚*Klgl*'. D19 ist eine dreiteilige rekursive Definition, analog z. B. zu D40—11, jedoch für ein Prädikat. Die von MENGER aufgestellte Definition der Dimensionszahl können wir in der folgenden Weise so umformen, daß sie den Anschein der Zirkelhaftigkeit verliert und in exakter Form darstellbar wird.

Zunächst handelt es sich um den Begriff „*F* hat im Punkt *x* höchstens die Dimensionszahl *n* (in bezug auf das Umgebungssystem *L*)"; hierfür sollen die folgenden Bestimmungen gelten: (1) die leere Klasse soll in bezug auf jedes *x* höchstens die Dimensionszahl —1 haben; (2) eine Klasse *F* soll in bezug auf eines ihrer Elemente *x* dann und nur dann höchstens die Dimensionszahl $n + 1$ haben, wenn es eine beliebig kleine Umgebung G_2 von *x* gibt (d. h. wenn es innerhalb jeder Umgebung G_1 von *x* eine Umgebung G_2 von *x* gibt) derart, daß der Durchschnitt von *F* mit der Begrenzung von G_2 in jedem seiner Punkte höchstens die Dimensionszahl *n* hat. Um für die rekursive Definition nicht —1, sondern 0 als Ausgangswert zu haben, definieren wir in D19 das Hilfsprädikat ‚*Di*' derart, daß ‚*Di* (*n*, *F*, *x*, *L*)' besagt: „*F* hat im Punkt *x* höchstens die Dimensionszahl *n* — 1".

D19. C. 1. $Di\,(0, F, x, L) \equiv Hausd(L) \,.\, \sim \exists\,(F)$.

2. $Klgl(0,n) \supset [Di(n',F,x,L) \equiv Hausd(L) \,.\, sub_1(mem_2(L))\,(F)$ $.\,Fx \,.\, (G_1)\,[L(G_1, x) \supset (\exists\, G_2)\,[L(G_2, x) \,.\, (G_2 \subset G_1) \,.$ $(y)\,(Fy \,.\, begr(G_2, L)\, y \supset Di\,(n, F.begr(G_2,L), y, L))]]]$.

3. $Klgl(n, 0) \supset [Di\,('n, F, x, L) \equiv x \neq x]$.

Die Teile (1) und (2) dieser Definition sind im Einklang mit den vorhin angegebenen beiden Bestimmungen. Teil (3) ist nur hinzugefügt, um auszudrücken, daß Zahlen kleiner als 0 nicht Erstglieder von *Di* sind (das Definiens ist ja L-falsch), mit andern Worten, daß Zahlen kleiner als —1 nicht als Dimensionszahlen vorkommen.

Unter der Dimensionszahl von *F* im Punkt *x* (in Zeichen ‚*dimp* (*F*, *x*, *L*)') verstehen wir die kleinste Zahl *n* derart, daß *F* in *x* höchstens die Dimensionszahl *n* hat (daß also nach der früheren Erläuterung für ‚*Di*' ‚*Di* (*n*′, *F*, *x*, *L*)' gilt):

D20. C. $dimp\,(F, x, L) = (Kn)\,(Di\,(n', F, x, L))$.

Wir sagen, die Dimensionszahl von *F* (ohne Bezugnahme auf einen Punkt, in Zeichen ‚*dim*(*F*, *L*)') sei *n*, wenn entweder *F* leer und $n = -1$, oder *F* nicht-leer ist und die Dimensionszahl von *F* in jedem Punkt von *F* kleiner oder gleich *n* ist und in mindestens einem Punkt von *F* gleich *n* ist:

D21. C. $dim(F, L) = (Kn)\,[(\sim \exists\,(F) \,.\, n = -1) \vee [(x)\,(Fx \supset$ $Klgl(dimp(F,x,L),n)) \,.\, (\exists\, y)\,(Fy \,.\, dimp(F,y,L) = n)]]$.

Wir sagen, F habe die homogene Dimensionszahl n, wenn entweder F leer ist und $n = -1$, oder F nicht-leer ist und in jedem seiner Punkte die Dimensionszahl n hat:

D22. C. $Dimhom(n, F, L) \equiv Hausd(L) \,.\, [(\sim \exists (F) \,.\, n = -1) \vee [\exists (F) \,.\, (x) (Fx \supset dimp(F,x,L) = n)]]$.

Die hier definierten Begriffe, insbesondere das logische Prädikat ‚*Dimhom*', werden in **48d**, **49** und **50** angewendet.

47. AS der projektiven, affinen und metrischen Geometrie

Im Anschluß an Roth [Axiomat.]. (Formulierung A ist nach **18** lesbar, C nach **33**.) Es wird zunächst ein AS der projektiven Geometrie aufgestellt (**47a**); dieses wird dann durch Anfügung eines neuen Grundzeichens (und unter Umständen neuer Axiome) zu einem AS der affinen Geometrie erweitert (**47b**); schließlich wird dieses in derselben Weise zu einem AS der metrischen (euklidischen) Geometrie erweitert (**47c**).

Hilbert hat das erste AS der euklidischen Geometrie vom modernen Gesichtspunkt aus aufgestellt (Grundlagen der Geometrie, 1899). Hilberts System ist in modifizierter Form von O. Helmer symbolisch dargestellt worden (Axiomatischer Aufbau der Geometrie in formalisierter Darstellung, Diss. Berlin 1934; Schriften des math. Seminars der Universität Berlin, 2, 1935).

47a. AS der projektiven Geometrie: A1—20. Die drei Grundzeichen sind Prädikate erster Stufe: ‚*A*', ‚*In*', ‚*T*'. ‚*Axu*' bedeutet: „Der Punkt x liegt auf der Geraden u"; ‚$In\,(x, r)$': „Der Punkt x liegt in der Ebene r"; ‚*Txyvw*': „Die Punkte x, y trennen die Punkte v, w auf einer Geraden". Die projektiven Geraden sind geschlossen, die Punkte auf einer solchen Geraden bilden also eine zyklische Anordnung.

Wir wollen eine dreisortige Sprache nehmen (**21c**); wir unterscheiden drei Typen von Individuen, die Punkte, die Geraden und die Ebenen. Daher benötigen wir drei Arten von Individualvariablen: ‚x', ‚y', ‚z', ‚v', ‚w' für Punkte, ‚t' und ‚u' für Geraden, ‚r' und ‚s' für Ebenen. [Bei Verwendung einer einsortigen Sprache müßten wir drei zusätzliche Grundzeichen nehmen, nämlich drei einstellige Prädikate für die Klassen der Punkte, der Geraden und der Ebenen. Ferner würden wir acht zusätzliche Axiome benötigen: drei Axiome besagen, daß die drei genannten Klassen einander ausschließen, fünf weitere Axiome geben an, zu welcher der drei Klassen die Erstglieder und die Zweitglieder von ‚*A*' und ‚*In*' und die Glieder von ‚*T*' gehören. In den weiteren Axiomen müßten dann häufig Bedingungen hinzugefügt werden, daß x und y Punkte sind, und dergleichen; in der dreisortigen Sprache ist das unnötig, da die Art der Individuen durch die Art der Variablen zum Ausdruck gebracht wird.]

Die Axiome A1 bis 11 heißen Axiome der Verknüpfung (Roth: I 1—8).

Für zwei verschiedene Punkte gibt es mindestens eine Gerade (A1) und höchstens eine Gerade (A2), auf der sie liegen:

A1. **A.** $x \neq y \supset (\exists u)(Axu \,.\, Ayu)$.
C. $J \subset A \mid A^{-1}$.

A2. **A.** $x \neq y \,.\, Axu \,.\, Ayu \,.\, Axt \,.\, Ayt \supset u = t$.
C. $2_m(A(-, u) \,.\, (-, t)) \supset u = t$.

Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte:

A3. **A.** $(\exists x)(\exists y)(Axu \,.\, Ayu \,.\, x \neq y)$.
C. $2_m(A(-, u))$.

Drei bzw. vier Punkte heißen kollinear, wenn sie auf einer Geraden liegen:

D1. $Coll_3(x, y, z) \equiv (\exists u)(Axu \,.\, Ayu \,.\, Azu)$.
D2. $Coll_4(x, y, z, w) \equiv (\exists u)(Axu \,.\, Ayu \,.\, Azu \,.\, Awu)$.

Es gibt drei nicht-kollineare Punkte:

A4. **A.** $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\sim Coll_3(x, y, z))$.
C. $\exists(\sim Coll_3)$.

Je drei nicht-kollineare Punkte liegen in einer Ebene:

A5. $\sim Coll_3(x, y, z) \supset (\exists r)(In(x, r) \,.\, In(y, r) \,.\, In(z, r))$.

In jeder Ebene gibt es mindestens einen Punkt:

A6. $(\exists x)\, In(x, r)$.

Für je drei verschiedene nicht-kollineare Punkte gibt es höchstens eine Ebene, in der sie liegen:

A7. **A.** $\sim Coll_3(x, y, z) \,.\, x \neq y \,.\, x \neq z \,.\, y \neq z \,.\, In(x, r) \,.\, In(y, r) \,.\, In(z, r) \,.\, In(x, s) \,.\, In(y, s) \,.\, In(z, s) \supset r = s$.
C. $\exists[(\sim Coll_3 \,.\, J_3)\, in\, (In(-, r) \,.\, In(-, s))] \supset r = s$.

Wir sagen, die Gerade u liege in der Ebene r („$GerIn(u, r)$"), wenn alle Punkte, die auf u liegen, in r liegen:

D3. $GerIn(u, r) \equiv (z)(Azu \supset In(z, r))$.

Liegen zwei verschiedene Punkte einer Geraden in einer Ebene, so die ganze Gerade:

A8. **A.** $Axu \,.\, Ayu \,.\, In(x, r) \,.\, In(y, r) \,.\, x \neq y \supset GerIn(u, r)$.
C. $2_m(A(-, u) \,.\, In(-, r)) \supset GerIn(u, r)$.

Haben zwei Ebenen einen Punkt gemein, so auch einen zweiten Punkt:

A9. **A.** $In(x, r) \,.\, In(x, s) \supset (\exists y)(y \neq x \,.\, In(y, r) \,.\, In(y, s))$.
C. $1_m(In(-, r) \,.\, In(-, s)) \supset 2_m(In(-, r) \,.\, In(-, s))$.

Es gibt vier Punkte, die nicht in einer Ebene liegen:

A10. $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists w) \sim (\exists r)[In(x, r) \,.\, In(y, r) \,.\, In(z, r) \,.\, In(w, r)]$.

Die Axiome A11—19 heißen Axiome der Anordnung (Roth: II 1—8).

Wenn die Punkte x, y die Punkte v, w trennen, so sind x, y, v, w voneinander verschieden und kollinear:

A11. A. $Txyvw \supset Coll_4\,(x, y, v, w) \,.\, x \neq y \,.\, x \neq u \,.\, x \neq v \,.\, y \neq u \,.\, y \neq v \,.\, u \neq v.$
C. $T \subset Coll_4 \,.\, J_4.$

Wenn x, y die v, w trennen, so trennen x, y die w, v:

A12. $Txyvw \supset Txywv.$

Wenn x, y die v, w trennen, so trennen v, w die x, y:

A13. $Txyvw \supset Tvwxy.$

Sind x, y, v verschiedene, kollineare Punkte, so gibt es ein w derart, daß x, y die v, w trennen:

A14. A. $Coll_3\,(x, y, v) \,.\, x \neq y \,.\, x \neq z \,.\, y \neq z \supset (\exists\, w)\; Txyvw.$
C. $(Coll_3 \,.\, J_3)\; xyv \supset \exists\, (T\,(x, y, v, \text{—})).$

Sind x, y, v, w verschiedene, kollineare Punkte, so trennen entweder x, y die v, w oder x, v die y, w oder y, v die x, w:

A15. A. $Coll_4\,(x, y, v, w) \,.\, x \neq y \,.\, x \neq v \,.\, x \neq w \,.\, y \neq v \,.\, y \neq w \,.\, v \neq w \supset Txyvw \vee Txvyw \vee Tyvxw.$
C. $(Coll_4 \,.\, J_4)\; xyvw \supset Txyvw \vee Txvyw \vee Tyvxw.$

Trennen x, y die v, w, so trennen x, v nicht die y, w:

A16. $Txyvw \supset \sim Txvyw.$

Trennen x, y die z, v und sind x, y, z, v, w kollinear, und ist w verschieden von x und von y, so trennen x, y die z, w dann und nur dann, wenn x, y die v, w nicht trennen:

A17. $Txyzv \,.\, Coll_3\,(z, v, w) \,.\, w \neq x \,.\, w \neq y \supset (Txyzw \equiv \sim Txyvw).$

A18 ist das Axiom von Pasch. Wenn drei nicht-kollineare Punkte x, y, z und alle Punkte der Geraden u und t in einer Ebene r liegen, aber keiner jener Punkte auf einer dieser Geraden, wenn ferner v ein Punkt auf u und w ein Punkt auf t ist und x, y die v, w trennen, so gibt es einen Punkt v auf u und einen Punkt w auf t derart, daß v, w entweder die y, z oder die x, z trennen:

A18. A. $In(x, r) \,.\, In(y, r) \,.\, In(z, r) \,.\, \sim Coll_3\,(x, y, z) \,.\, GerIn\,(u, r) \,.\, GerIn\,(t, r) \,.\, \sim Axu \,.\, \sim Ayu \,.\, \sim Azu \,.\, \sim Axt \,.\, \sim Ayt \,.\, \sim Azt \,.\, (\exists\, v)\,(\exists\, w)\,(Avu \,.\, Awt \,.\, Txyvw) \supset (\exists\, v)\,(\exists\, w)\,[Avu \,.\, Awt \,.\, (Tvwyz \vee Tvwxz)].$
C. $\sim Coll_3\,(x, y, z) \,.\, GerIn\,(u, r) \,.\, GerIn\,(t, r) \,.\, [\{x; y; z\} \subset (In\,(\text{—}, r) \,.\, \sim A\,(\text{—}, u) \,.\, \sim A\,(\text{—}, t))] \,.\, (\exists\, v)\,(\exists\, w)\;(Avu \,.\, Awt \,.\, Txyvw) \supset (\exists\, v)\,(\exists\, w)\;[Avu \,.\, Awt \,.\, (Tvwyz \vee Tvwxz)].$

Wir sagen, der Punkt w gehöre zum Segment x, y, z (‚$Segm\,(w, x, y, z)$‘), wenn x, y, z drei verschiedene Punkte auf einer Geraden u sind, w auf u liegt, und w, y die x, z nicht trennen:

D4. A. $Segm\,(w, x, y, z) \equiv (\exists\, u)\,(Axu \,.\, Ayu \,.\, Azu \,.\, Awu) \,.\, x \neq y \,.\, x \neq z \,.\, y \neq z \,.\, \sim Twyxz.$
C. $Segm\,(w, x, y, z) \equiv (J_3\; in\; A\,(\text{—}, u))\; xyz \,.\, Awu \,.\, \sim Twyxz.$

Wir sagen, w sei ein innerer Punkt des Segmentes x, y, z (‚*ISegm* (w, x, y, z)'), wenn w zum Segment x, y, z gehört und von x und z verschieden ist:

D5. $ISegm\,(w, x, y, z) \equiv Segm\,(w, x, y, z) \,.\, w \neq x \,.\, w \neq z.$

A19 ist das Axiom der Lückenlosigkeit. Wenn F Teilklasse eines Segmentes ist und mindestens zwei Punkte besitzt, so gibt es x_1, y_1, z_1 derart, daß F im Segment x_1, y_1, z_1 enthalten ist und daß jedes Segment, von dem x_1 oder z_1 ein innerer Punkt ist, einen inneren Punkt hat, der zu F gehört:

A19. $(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(\exists\, z)\,(v)\,\big(Fv \supset Segm\,(v, x, y, z)\big) \,.\, (\exists\, v)\,(\exists\, w)\,\big(Fv \,.\, Fw \,.\, v \neq w\big) \supset (\exists\, x_1)\,(\exists\, y_1)\,(\exists\, z_1)\,\big[(v)\,\big(Fv \supset Segm\,(v, x_1, y_1, z_1)\big) \,.\, (x_2)\,(y_2)\,(z_2)\,\big(ISegm\,(x_1, x_2, y_2, z_2) \vee ISegm\,(z_1, x_2, y_2, z_2)\big) \supset (\exists\, w)\,\big(ISegm\,(w, x_2, y_2, z_2) \,.\, Fw\big)\big].$

A20 ist das projektive Axiom (Roth III): Zwei Geraden in einer Ebene haben stets einen Punkt gemein:

A20. A. $GerIn\,(u, r) \,.\, GerIn\,(t, r) \supset (\exists\, z)\,\big(Azu \,.\, Azt\big).$
C. $GerIn \mid GerIn^{-1} \subset A^{-1} \mid A.$

47b. Affine Geometrie. Die affine Geometrie entsteht aus der projektiven durch Auszeichnung einer bestimmten Ebene, der sogenannten uneigentlichen Ebene (‚*uneb*'). Zusätzliches Grundzeichen: ‚*uneb*', eine Individualkonstante der dritten Sorte.

In der uneigentlichen Ebene liegende Punkte und Geraden heißen uneigentliche Punkte bzw. uneigentliche Geraden. Die übrigen Ebenen, Punkte und Geraden heißen eigentliche Ebenen (‚*EE*'), eigentliche Punkte (‚*EP*') bzw. eigentliche Geraden (‚*EGer*'):

D6. $EE(r) \equiv r \neq uneb.$

D7. $EP(x) \equiv \sim In(x, uneb).$

D8. $EGer(u) \equiv \sim GerIn(u, uneb).$

Zwei eigentliche Gerade heißen parallel, wenn sie einen uneigentlichen Punkt gemein haben:

D9. $Par(u, t) \equiv EGer(u) \,.\, EGer(t) \,.\, (\exists\, x)\,\big(In(x, uneb) \,.\, Axu \,.\, Axt\big).$

Bei dieser Form des Systems ist für die affine Geometrie kein zusätzliches Axiom nötig. Eine Formregel bestimmt, daß ‚*uneb*' eine Konstante des dritten Individuentypus ist, also zu demselben Typus gehört wie die Variable ‚*r*'. Daher ist ‚$(\exists\, r)\,\big(r = uneb\big)$' beweisbar („Es gibt eine Ebene *uneb*"). [Anstatt ‚*uneb*' als neues Grundzeichen für die affine Geometrie zu nehmen, kann man verschiedene andere Wege einschlagen, darunter die Folgenden. (1) Man nimmt das Prädikat ‚*UE*' als Grundzeichen, das die Klasse der uneigentlichen Ebenen bezeichnet. Durch Axiome wird dann ausgesagt, daß eine und nur eine Ebene zu dieser Klasse gehört. (2) Man nimmt ‚*Par*' („Parallel") als Grundzeichen und stellt geeignete Axiome dafür auf; dann definiert man mit Hilfe von ‚*Par*' ‚*UE*' und, wenn man will, auch ‚*uneb*'; die letztere Konstante wird eingeführt durch

eine Definition durch Kennzeichnung (vgl. **35b**), nachdem ‚1 (*UE*)' bewiesen ist.]

47c. AS der metrischen, euklidischen Geometrie: A1—32. Die euklidische Geometrie entsteht aus der affinen durch Fortlassen der uneigentlichen Elemente, d. h. genauer: durch Einführung von Begriffen, die sich nur auf die eigentlichen Elemente beziehen. Zusätzliches Grundzeichen: ‚*Senk*'. ‚*Senk* (*u*, *r*)': „Die eigentliche Gerade *u* steht senkrecht auf der eigentlichen Ebene *r*".

A21 bis A32 heißen Axiome der Orthogonalität (ROTH: V 1—3). Die Erstglieder von *Senk* sind eigentliche Geraden, die Zweitglieder eigentliche Ebenen:

A21. A. $mem_1\,(Senk)\,u \supset EGer(u)$.
C. $mem_1\,(Senk) \subset EGer$.

A22. A. $mem_2\,(Senk)\,r \supset EE(r)$.
C. $mem_2\,(Senk) \subset EE$.

Liegt der eigentliche Punkt *x* in der (eigentlichen) Ebene *r*, so gibt es mindestens (A23) und höchstens (A24) eine Gerade *u* durch *x*, die auf *r* senkrecht steht:

A23. $EP(x) \,.\, In\,(x, r) \supset (\exists\, u)\,(Axu \,.\, Senk(u, r))$.

A24. A. $EP(x) \,.\, In(x, r) \,.\, Axu \,.\, Senk(u, r) \,.\, Axt \,.\, Senk(t, r) \supset u = t$.
C. $EP(x) \,.\, In(x, r) \supset \sim 2_m\,(A\,(x, —) \,.\, Senk\,(—, r))$.

Liegt der eigentliche Punkt *x* auf der Geraden *u*, so gibt es mindestens eine (A25) und höchstens eine (A26) Ebene *r*, in der *x* liegt und auf der *u* senkrecht steht:

A25. $EP(x) \,.\, Axu \supset (\exists\, r)\,(In(x, r) \,.\, Senk(u, r))$.

A26. A. $EP(x) \,.\, Axu \,.\, In(x, r) \,.\, Senk(u, r) \,.\, In(x, s) \,.\, Senk(u, s) \supset r = s$.
C. $EP(x) \,.\, Axu \supset \sim 2_m\,(In\,(x, —) \,.\, Senk\,(u, —))$.

Liegt der eigentliche Punkt *x* auf der (eigentlichen) Geraden *u*, so gibt es mindestens eine (A27) und höchstens eine (A28) Ebene *s* derart, daß *x* in *s* liegt und daß Folgendes gilt: Liegt *u* in der Ebene *r* und steht die Gerade *t* senkrecht auf *r* und liegt *x* auf *t*, so liegen alle Punkte von *t* in *s*:

A27. $EP(x) \,.\, Axu \supset (\exists\, s)\,[In(x, s) \,.\, (r)\,(t)\,(GerIn(u, r) \,.\, Senk(t, r) \,.\, Axt \supset GerIn\,(t, s))]$.

A28. $EP(x) \,.\, Axu \,.\, In(x, s_1) \,.\, In(x, s_2) \,.\, (r)\,(t)\,[GerIn(u, r) \,.\, Senk(t, r) \,.\, Axt \supset GerIn(t, s_1) \,.\, GerIn(t, s_2)] \supset s_1 = s_2$.

Liegt der eigentliche Punkt *x* auf den Geraden *u* und *t* und in den Ebenen *s* und *r*, und steht *u* senkrecht auf *s* und *t* senkrecht auf *r*, und liegt *u* in *r*, so liegt *t* in *s*:

A29. $EP(x) \,.\, Axu \,.\, Axt \,.\, In(x, s) \,.\, In(x, r) \,.\, Senk(u, s) \,.\, Senk(t, r) \,.\, GerIn(u, r) \supset GerIn(t, s)$.

Liegt der eigentliche Punkt x auf der Geraden u und in der Ebene r, und steht u senkrecht auf r, so liegt u nicht in r:

A 30. $EP(x) \,.\, Axu \,.\, In(x, r) \,.\, Senk(u, r) \supset \sim GerIn(u, r)$.

Stehen die Geraden u und t senkrecht auf einer Ebene, so gibt es eine Ebene r, in der u und t liegen:

A 31. A. $Senk(u, s) \,.\, Senk(t, s) \supset (\exists r)\,(GerIn(u, r) \,.\, GerIn(t, r))$.
C. $Senk \mid Senk^{-1} \subset GerIn \mid GerIn^{-1}$.

Stehen zwei verschiedene Geraden u und t senkrecht auf einer Ebene, so haben sie keinen eigentlichen Punkt gemein:

A 32. $Senk(u, s) \,.\, Senk(t, s) \,.\, EP(x) \,.\, Axu \,.\, Axt \supset u = t$.

D. ASe der Physik

48. ASe der Raum-Zeit-Topologie: 1. Das *K*-*Z*-System

48a. Allgemeine Erläuterungen. Die topologische Struktur der physikalischen Welt ist unabhängig von Maßgrößen. Die übliche Methode der Behandlung topologischer Eigenschaften von Raum und Zeit in der Physik macht aber von Maßgrößen Gebrauch, nämlich von Koordinatensystemen. Ein solches System ordnet jedem Raum-Zeit-Punkt ein Quadrupel reeller Zahlen zu, auf Grund gewisser willkürlicher Konventionen. Nachträglich wird dann diese Willkürlichkeit wieder eliminiert, indem nur diejenigen Eigenschaften betrachtet werden, die bei beliebigen Transformationen gewisser Art von einem Koordinatensystem zu einem andern invariant bleiben. Dieses übliche Verfahren ist mathematisch bequem, weil es die geläufigen und wirksamen Hilfsmittel der reellen Zahlen und ihrer Funktionen benutzt; aber es ist sozusagen methodisch unrein. Daher ergibt sich die Frage, ob es nicht möglich ist, eine rein topologische Methode anzuwenden, d. h. eine solche, die keinen Gebrauch von begrifflichen Mitteln macht, die metrischer, nicht-topologischer Natur sind, wie reelle Zahlen und Koordinatensysteme. Die Logik der Relationen macht eine solche Methode möglich, und zwar allgemein für topologische Probleme, nicht nur für solche in bezug auf Raum und Zeit in der Physik. Das gegenwärtige AS soll an einem Beispiel zeigen, wie die Logik der Relationen es möglich macht, topologische Fragen mit rein topologischen Mitteln zu behandeln. Das vorliegende AS ist auf die Auffassungen von Raum und Zeit in EINSTEINS allgemeiner Relativitätstheorie basiert; die Kenntnis dieser Theorie ist aber hier nicht vorausgesetzt.

Für nähere Erläuterungen der hier verwendeten Begriffe der Relativitätstheorie siehe z. B. REICHENBACH, Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre, 1924. Zur Diskussion des hier angegebenen *K*-*Z*-Systems (auf Grund meiner früheren Darstellung in [Abriß]) und verwandter Systeme von ROBB, REICHENBACH und RUSSELL, vgl. H. MEHLBERG, Essai sur la théorie causale du temps, Studia Philosophica I, 1935, and II, 1937. Ein ähnliches System, in Anlehnung an REICHENBACH und das vorliegende System: K. SCHNELL, Eine Topologie der Zeit in logistischer Darstellung, Diss. Münster i. W., 1938. Über die philosophische Bedeutung dieses AS vgl. CARNAP, Über die Ab-

hängigkeit der Eigenschaften des Raumes von denen der Zeit, Kantstudien 30, 1925.

Das vorliegende System behandelt die Bewegungen und Koinzidenzen physikalischer Teilchen. Über die physikalische Natur dieser Teilchen werden hier keine Annahmen gemacht (man mag etwa an eigentliche Teilchen, wie Elektronen oder dergleichen, denken, aber auch an kleinste Elemente elektromagnetischer Strahlung); sie werden in idealisierter Form als unausgedehnt angesehen. Wir nehmen als Individuen die Momente oder Schichten von Teilchen. Die Momente eines Teilchens nennen wir (nach MINKOWSKI) seine „Weltpunkte"; ihre Klasse heißt die „Weltlinie" des Teilchens. Jeder Weltpunkt ist einem Raum-Zeit-Punkt, d. h. einer Stelle im Raum-Zeit-Kontinuum, zugeordnet. a_1, b_1, c_1, .. seien Weltpunkte eines bestimmten Teilchens; a_2, b_2, c_2, .. Weltpunkte eines andern Teilchens. Wenn nun etwa b_1 und b_2 demselben Raum-Zeit-Punkt zugeordnet sind, so besagt das, daß zu der betreffenden Zeit die beiden Teilchen an demselben Ort sind, daß sie also koinzidieren, sich berühren. Wir führen nun eine Relation der Koinzidenz ein, symbolisiert durch das Grundzeichen ‚K'; dann wird die genannte Sachlage formuliert durch ‚Kb_1b_2'. [Eine andere Methode, die wir bei der zweiten und dritten Systemform (**49** und **50**) anwenden werden, besteht darin, die Weltpunkte mit den Raum-Zeit-Punkten zu identifizieren, also in dem beschriebenen Fall b_1 und b_2 nicht als koinzident, sondern als identisch zu nehmen: ‚$b_1 = b_2$'.] Weltpunkte, die zu demselben Teilchen gehören, nennen wir (nach KURT LEWIN) g e n i d e n t i s c h. In dem früheren Beispiel sind a_1 und b_1 genidentisch, ferner auch a_2 und c_2, aber nicht b_1 und b_2, auch wenn sie koinzidieren. Das zweite Grundzeichen ‚Z' bezeichnet die Relation Früher für zwei genidentische Weltpunkte. Die Relation Z stellt also nur eine lokale Zeitordnung dar („Eigenzeit" in der Relativitätstheorie), nicht eine Zeitrelation zwischen entfernten Vorgängen. Angenommen, die Weltpunkte a_1, b_1, c_1 eines Teilchens treten in dieser zeitlichen Reihenfolge auf; dann gelten die Sätze ‚Za_1b_1', Zb_1c_1', ‚Za_1c_1'. Z ist ein topologischer, nicht ein metrischer Begriff; das heißt, daß zur Feststellung von Z nur ein Vergleich des Früher und Später, aber keine Messung von Zeitlängen vorausgesetzt wird. Es ist oft gesagt worden, daß alle Feststellungen der Physik sich zurückführen lassen auf Feststellungen von Koinzidenzen. Aber das ist nicht genau, man muß noch die Feststellung der Eigenzeitrelation hinzunehmen. Denn durch Beobachtung von Koinzidenzen allein kann man nicht die zeitliche Reihenfolge der an einem Teilchen auftretenden Vorgänge — nämlich der Koinzidenzen mit andern Teilchen — feststellen. — Der Aufbau des Systems, von dem im folgenden nur die Hauptzüge angedeutet werden, wird zeigen, daß nicht nur die topologische Struktur der Zeitordnung, sondern auch die der Raumordnung sich durch die Relationen K und Z ausdrücken lassen.

48b. *K*, *Z* und Weltlinien. Die in diesem Paragraphen dargestellte erste Form des Systems enthält zwei G r u n d z e i c h e n : ‚K' und ‚Z'. (Der erste Teil, **48b** und **c**, ist lesbar in Formulierung A (ohne A13 und

die Theoreme) nach 18, in Formulierung C nach 38. Die Theoreme werden der Kürze wegen nur in Sprache C formuliert. Einige Axiome werden in Sprache C in zwei Formulierungen gegeben.)

K ist symmetrisch (A1) und transitiv (A2) (also eine Äquivalenzrelation, 34a):

A1. A. $Kxy \supset Kyx$.
C. $K \subset K^{-1}$; $Sym(K)$.

A2. A. $Kxy \,.\, Kyz \supset Kxz$.
C. $K^2 \subset K$; $Trans(K)$.

Jedes Individuum koinzidiert mit etwas:

A3. A. $(x)\,(\exists\, y)\, Kxy$.
C. $mem_1(K)$. [Abkürzung für ‚$U(mem_1(K))$', 28b.]

Theorem. Jedes Individuum koinzidiert mit sich selbst, K ist total reflexiv:

T1. C. $I \subset K$; $Reflex(K)$. (Aus A1, A2, A3, L31—1d und c.)

Z ist transitiv (A4), irreflexiv (A5) und dicht (A6, s. 38a):

A4. A. $Zxy \,.\, Zyz \supset Zxz$.
C. $Z^2 \subset Z$; $Trans(Z)$.

A5. A. $\sim Zxx$.
C. $Z \subset J$; $Irr(Z)$.

A6. A. $Zxy \supset (\exists\, u)\,(Zxu \,.\, Zuy)$.
C. $Z \subset Z^2$.

Jedes Individuum ist ein Erstglied (A7) und ein Zweitglied (A8) von Z:

A7. A. $(x)\,(\exists\, y)\, Zxy$.
C. $mem_1\,(Z)$.

A8. A. $(y)\,(\exists x)\, Zxy$.
C. $mem_2\,(Z)$.

Theoreme. Z ist asymmetrisch (T2); Z hat kein Anfangsglied (T3) und kein Endglied (T4):

T2. C. $Z \subset \sim Z^{-1}$; $As(Z)$. (Aus A4, A5, L31—1g.)

T3. C. $\sim \exists\,(init\,(Z))$. (Aus A8, D32—8.)

T4. C. $\sim \exists\,(init\,(Z^{-1}))$. (Aus A7.)

A9 führt zu T5; K und Z schließen sich aus:

A9. A. $Kxy \,.\, x \neq y \supset \sim Zxy$.
C. $K \,.\, J \subset \sim Z$.

T5. C. $K \subset \sim Z$. (Aus A9, A5.)

Weltpunkte heißen genidentisch, wenn entweder zwischen ihnen in der einen oder der andern Richtung die Relation Z besteht oder sie identisch sind:

D1. **A.** $Gen(x, y) \equiv Zxy \lor Zyx \lor x = y.$
C. $Gen = Z \lor Z^{-1} \lor I.$

Theoreme. *Gen* ist symmetrisch (T6) und total reflexiv (T7):

T6. **C.** $Sym\,(Gen)$. (Aus D1.)

T7. **C.** $Reflex\,(Gen)$. (Aus D1.)

Eine Weltlinie spaltet sich nicht in zwei Zweige, weder in Richtung auf die Vergangenheit (A10), noch in Richtung auf die Zukunft (A11):

A10. **A.** $Zxz \,.\, Zyz \supset Gen\,(x, y).$
C. $Z \mid Z^{-1} \subset Gen.$

A11. **A.** $Zux \,.\, Zuy \supset Gen\,(x, y).$
C. $Z^{-1} \mid Z \subset Gen.$

Theorem. *Gen* ist transitiv:

T8. **C.** $Trans\,(Gen)$. (Aus A4, A10, A11.)

Gen ist somit eine Äquivalenzrelation (T6, T8). Die Weltlinien sind die nicht-leeren Äquivalenzklassen von *Gen*; mit andern Worten, eine Weltlinie ist die Klasse der mit einem Weltpunkt genidentischen Weltpunkte:

D2. **A.** $Wl(F) \equiv (\exists\, x)\,[(y)\,(Fy \equiv Gen(y, x))].$
C. $Wl(F) \equiv (\exists\, x)\,[F = Gen\,(—, x)].$

Die Weltpunkte jeder Weltlinie werden durch eine Teilrelation von Z in eine Reihe geordnet; diese Reihenrelationen nennen wir Weltlinienreihen (‚*Wlin*'):

D3. **A.** $Wlin(H) \equiv (\exists\, F)\,[Wl(F) \,.\, (x)\,(y)\,(Hxy \equiv Zxy \,.\, Fx \,.\, Fy)].$
C. $Wlin(H) \equiv (\exists\, F)\,[Wl(F) \,.\, (H = Z\; in\; F)].$

Theoreme. Die Weltlinienreihen sind transitiv (T11, aus A4, L32—2c), irreflexiv (T12, aus A5), asymmetrisch (T13, aus T2) und zusammenhängend (T14, aus A4, A10, A11); also sind sie Reihen (T15, aus T11, T12, T14); ferner sind sie dicht (T16, aus A6):

T11. **C.** $Wlin \subset Trans.$

T12. **C.** $Wlin \subset Irr.$

T13. **C.** $Wlin \subset As.$

T14. **C.** $Wlin \subset Connex.$

T15. **C.** $Wlin \subset Ser.$

T16. **C.** $Wlin(H) \supset (H \subset H^2).$

Jede Weltlinienreihe ist eine DEDEKINDsche Relation (A12, 38b) und hat daher DEDEKINDsche Stetigkeit (T17, aus T15, T16, A12, T3, T4):

A12. **T.** $Wlin(H) \supset (F)(G)\,[(\exists x)(Fx).(\exists y)(Gy)\,.\,(x)\,(y)\,(Fx\,.\,Gy \supset Hxy)$
$\supset (\exists\, z)\,[(x)(Fx \,.\, x \neq z \supset Hxz) \,.\, (y)\,(Gy \,.\, y \neq z \supset Hzy)]].$
C. $Wlin \subset Ded.$

T17. **C.** $Wlin \subset SerDed_{00}.$

Das folgende Axiom A13 ist nur in Sprache C formuliert; es kann überschlagen werden, da es im weiteren nicht benützt wird. Es besagt, daß es für jede Weltlinienreihe eine abzählbare Zwischenklasse gibt (im Sinn von D38—8). Daher hat eine solche Reihe auch CANTORsche Stetigkeit (T18, aus T17, A13). Dies ist eine topologische, strukturelle Eigenschaft dieser Reihen, die den Übergang zur Metrik möglich macht, nämlich durch eine eineindeutige Zuordnung der reellen Zahlen zu den Weltpunkten einer Weltlinie.

A13. C. $Wlin(H) \supset (\exists F) [\aleph_0(F) . (x)(y) (Hxy \supset (\exists u)(Fu . Hxu . Huy))]$.

T18. C. $Wlin \subset \vartheta_{00}$.

48c. Wirkungsrelation. [Lesbar in Formulierung A (nur die Axiome) nach **18**, in Formulierung C nach **38**.] Von einem Weltpunkt x geht dann und nur dann eine Wirkung aus, die den Weltpunkt y erreicht, wenn x mit y durch ein Signal verknüpft ist. Im einfachsten Fall kann etwa x mit dem Weltpunkt u eines Teilchens koinzidieren, das sich so bewegt, daß ein späterer Weltpunkt v desselben Teilchens mit y koinzidiert. (Je nachdem dieses vermittelnde Teilchen ein materielles Teilchen oder ein Teilchen der Strahlungsenergie ist, handelt es sich um ein materielles Signal oder ein Strahlungssignal, z. B. Lichtsignal.) In andern Fällen ist das Signal nicht durch ein einziges Teilchen gebildet, sondern durch eine Kette von Teilchen. x und y sind in diesem Fall verbunden durch eine Kette von Teilstrecken von Weltlinien derart, daß das Ende jeder Teilstrecke mit dem Anfang der nächsten durch Koinzidenz verbunden ist. Abb. 4 stellt ein Beispiel einer Signalkette zwischen b_1 und e_3 dar: Zb_1c_1, Kc_1c_2, Zc_2d_2, Kd_2d_3, Zd_3e_3. Da identische Weltpunkte auch als koinzident gerechnet werden (T1), so bedeutet es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir in der Explikation des Begriffes der Signalkette fordern, daß jede derartige Kette mit K anfängt und mit K aufhört. Besteht eine Kette dieser Art, so wollen wir sagen, die Wirkungsrelation (‚W') bestehe zwischen dem Anfangs- und dem Endglied. So gilt z. B. in dem genannten Beispiel, wenn wir noch ‚Kb_0b_1' und ‚Ke_3e_4' hinzufügen: ‚Wb_0e_4'; es gilt aber auch ‚Wb_1e_3', da K total-reflexiv ist, da also ‚Kb_1b_1' und ‚Ke_3e_3' gelten. ‚W' besagt also so viel wie ‚$K \mid Z \mid K \mid Z \mid K \mid Z \ldots \mid K$'. Auf Grund dieser Überlegung stellen wir die Definition D4 für ‚W' auf. (Von hier ab geben wir nicht nur die Theoreme, sondern auch die Definitionen nur in Formulierung C; schon D4 würde in Formulierung A sehr umständlich werden.)

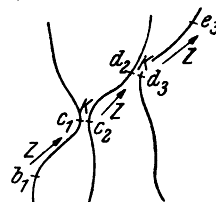


Abb. 4

D4. C. $W = (K \mid Z)^{>0} \mid K$.

Theoreme. Wenn Z gilt, so auch W (T19; aus T1); W ist transitiv (T20; aus A2):

T19. C. $Z \subset W$.

T20. C. *Trans* (W).

Das folgende Axiom dient zum Beweis der Irreflexivität von W (T21):

A14. A. $Wxy \,.\, \sim Zxy \supset x \neq y$.
C. $W \,.\, \sim Z \subset J$.

T21. C. *Irr* (W). (Aus A14, A5.)

W ist asymmetrisch (T22; aus T20, T21). W schließt K aus (T23; aus A1, A2, T20, T21):

T22. C. *As* (W).

T23. C. $W \subset \sim K$.

Zwei weitere Axiome besagen Folgendes. Angenommen, x stehe zu y in der Relation W und liege entweder außerhalb der Weltlinie von y oder auf dieser Weltlinie, aber nicht vor y; dann gibt es erstens einen Weltpunkt u vor y auf der Weltlinie von y, der so früh ist, daß ihn kein Signal (d. h. W-Relation) von x erreicht (A15), und zweitens einen Weltpunkt v nach x auf der Weltlinie von x, der so spät ist, daß kein Signal von ihm y erreicht (A16). Es folgt dann, daß dasselbe auch für beliebige Weltpunkte x, y gilt (T24, aus A15, T20, A8; und T25, aus A16, T20, A7.) Hierdurch ist ausgesagt, daß sich auf jeder Weltlinie beliebig frühe und beliebig späte Weltpunkte befinden.

A15. A. $Wxy \,.\, \sim Zxy \supset (\exists u)\,(\sim Wxu \,.\, Zuy)$.
C. $W \,.\, \sim Z \subset (\sim W) \,|\, Z$.

T24. C. $(\sim W) \,|\, Z$.

A16. A. $Wxy \,.\, \sim Zxy \supset (\exists v)\,(Zxv \,.\, \sim Wvy)$.
C. $W \,.\, \sim Z \subset Z \,|\, \sim W$.

T25. C. $Z \,|\, \sim W$.

A17 ist das Axiom der endlichen Grenzgeschwindigkeit. Wenn es eine unendliche Signalgeschwindigkeit gäbe, so könnte es ein Signal von u nach x und zugleich auch ein Signal von x nach u geben. Dies ist durch die Asymmetrie von W ausgeschlossen (T22). Hiermit ist aber noch nicht ausgeschlossen, daß es Signalgeschwindigkeiten von jedem beliebigen endlichen Betrag gibt. Wäre das der Fall, so könnte es vorkommen, daß von jedem Punkt vor u auf der Weltlinie von u — wenn auch nicht von u selbst — ein Signal nach x ginge, und von x ein Signal zu jedem Punkt nach u auf der Weltlinie von u. A17 führt zu T26 und schließt damit den genannten Fall aus, im Einklang mit der Relativitätstheorie.

A17. A. $Gen(u, v) \,.\, (y)\,(Zyu \supset Wyx) \,.\, (z)\,(Zvz \supset Wxz) \,.\, \sim Kxv \,.\, \sim (Wux \,.\, Wxv) \supset u \neq v$.

C. $Gen(u, v) \,.\, (Z(—, u) \subset W(—, x)) \,.\, (Z(v, —) \subset W(x, —)) \,.\, \sim Kxv \,.\, \sim (Wux \,.\, Wxv) \supset u \neq v$.

T26. C. $(Z(—, u) \subset W(—, x)) \,.\, (Z(v, —) \subset W(x, —)) \,.\, \sim Kxv \supset u \neq v$.

48d. Die Struktur des Raumes. (Von hier ab ist alles, auch die Axiome, nur in Formulierung C gegeben; lesbar nach **38** und dazu aus diesem Kapitel **40** und **46**.) Wir nennen zwei Weltpunkte x und y gleichzeitig (‚$Glz\,(x,y)$'), wenn weder zwischen x und y noch zwischen y und x die Wirkungsrelation besteht. Dies steht im Einklang mit der Relativitätstheorie; nach dieser gibt es dann und nur dann ein zulässiges Koordinatensystem, in dem x und y denselben Wert der Zeitkoordinate haben, wenn es unmöglich ist, daß ein Signal von x nach y oder von y nach x geht (vgl. REICHENBACH, Philosophie der Raum-Zeit-Lehre, Berlin 1928, S. 171).

D5. C. $Glz = \sim W \,.\, \sim W^{-1}$.

Die Klasse $W\,(—, a)$ der Weltpunkte, von denen eine Wirkungsrelation W nach dem Weltpunkt a geht, heißt nach MINKOWSKI der Vorkegel von a (s. Abb. 5). Die Klasse $W(a, —)$ der Weltpunkte, zu denen eine Wirkungsrelation von a geht, heißt der Nachkegel von a. Infolge der endlichen Grenzgeschwindigkeit (A17) besteht zwischen Vor- und Nachkegel das sogenannte Zwischengebiet von a; es ist die Klasse $Glz\,(—, a)$ der mit a gleichzeitigen Weltpunkte. Eine nicht mit a koinzidierende Weltlinie F hat mit dem Zwischengebiet von a eine ganze Strecke gemein (s. die Klasse $F.Glz(—, a)$, Abb. 5); also liegt auf F nicht nur ein mit a gleichzeitiger Punkt, sondern viele solche (und zwar unendlich viele, s. unten T34). Diese sind aber untereinander nicht gleichzeitig; Glz ist also nicht transitiv (im Unterschied zu der Gleichzeitigkeit in bezug auf ein bestimmtes Koordinatensystem).

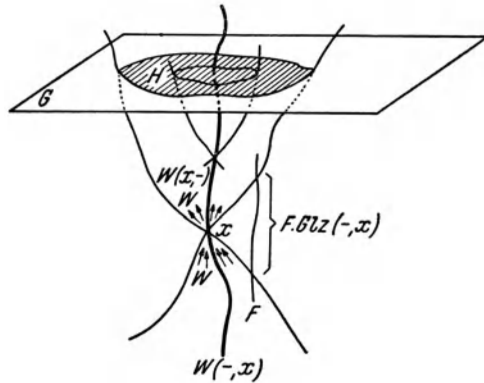


Abb. 5

Theoreme über Glz. Glz ist total-reflexiv (T27; aus T21) und symmetrisch (T28). Koinzidierende Punkte sind gleichzeitig (T29; aus T23, A1); gleichzeitige genidentische Punkte sind identisch (T30; aus T19); Glz schließt W und daher Z aus (T31; T32, aus T19).

T27. C. *Reflex* (Glz).

T28. C. *Sym* (Glz).

T29. C. $K \subset Glz$.

T30. C. $Glz \,.\, Gen \subset I$.

T31. C. $Glz \subset \sim W$.
T32. C. $Glz \subset \sim Z$.

Weitere Theoreme: Für jeden Weltpunkt x gibt es auf jeder Weltlinie F einen gleichzeitigen Weltpunkt (T33), und, wenn x mit keinem Punkt von F koinzidiert, sogar unendlich viele gleichzeitige Weltpunkte (T34):

T33. C. $(x)\,[Wl\,(F) \supset \exists\,(F\,.\,Glz\,(—, x))]$.

T34. C. $Wl\,(F)\,.\,\sim(K``F)\,(x) \supset ClsRefl\,(F\,.\,Glz\,(—, x))$.

Grundzüge eines Beweises für T33 und T34. Wir unterscheiden zwei Fälle; T33 bezieht sich auf beide, T34 nur auf den zweiten. (1) x koinzidiere mit einem Punkt der Weltlinie F; die Behauptung von T33 ergibt sich mit Hilfe von T29, und in dem speziellen Fall, daß x zu F gehört, mit Hilfe von T27. (2) x koinzidiere nicht mit einem Punkt von F. F_1 sei die Klasse der Punkte von F, die die Relation W zu x haben ($F\,.\,W\,(—, x)$); F_2 sei die Klasse der Punkte von F, zu denen x die Relation W hat ($F\,.\,W\,(x, —)$). Infolge der DEDEKINDschen Stetigkeit (T17) gibt es eine obere Grenze für F_1 (d. h. einen Weltpunkt auf F, der die Klasse F_1 und ihr Komplement in F trennt, s. **38b**), etwa y_1, und eine untere Grenze für F_2 (d. h. einen Weltpunkt auf F, der das Komplement von F_2 und F_2 trennt), etwa y_2. Nach dem Axiom der endlichen Grenzgeschwindigkeit (A17) sind y_1 und y_2 verschieden; und zwar gilt $Zy_1\,y_2$. Nach A6 gibt es unendlich viele Punkte zwischen y_1 und y_2 auf F. Alle diese sind mit x gleichzeitig (vgl. Abb. 5).

Ein Raum ist sozusagen ein dreidimensionaler Querschnitt durch die vierdimensionale Raum-Zeit-Welt, und zwar quer zur Zeitrichtung, also so, daß er alle Weltlinien schneidet. Wir definieren: ein Raum ist eine Klasse von untereinander gleichzeitigen Weltpunkten, die mit jeder Weltlinie mindestens einen Weltpunkt gemein hat.

D6. C. $Raum(G) \equiv (x)\,(y)\,[Gx\,.\,Gy \supset Glz(x,y)]\,.\,(F)\,[Wl(F) \supset \exists(G.F)]$.

Hieraus folgt, daß jeder Raum mit jeder Weltlinie genau einen Punkt gemein hat (T35; aus T32):

T35. C. $Raum\,(G)\,.\,Wl\,(F) \supset 1(G.F)$.

A18 soll sicherstellen, daß es für jeden Weltpunkt einen Raum gibt, zu dem er gehört (T36). In A18 fügen wir, um eine schwächere Formulierung für das Axiom zu bekommen, noch die Bedingung ein, daß es zu dem Weltpunkt x auf jeder Weltlinie, mit der er nicht koinzidiert, unendlich viele gleichzeitige Punkte gibt. Diese Bedingung kann in T36 fortgelassen werden, da sie nach T34 erfüllt ist. T37 besagt, daß die mit Punkten eines Raumes koinzidierenden Punkte auch zu dem Raum gehören.

A18. C. $(F)\,[Wl\,(F)\,.\,\sim(K``F)\,x \supset ClsRefl\,(F\,.\,Glz\,(—, x))] \supset$
$(\exists\,G)\,[Raum\,(G)\,.\,Gx]$.

T36. C. $sm_1\,(Raum)\,x$.

T37. C. $Raum\,(G) \supset (K``G \subset G)$.

Die Grundbegriffe K und Z bestimmen eine topologische Ordnung zunächst nur für die Zeit. Nun erhebt sich die Frage, ob man auf dieser

Grundlage, ohne neue Grundbegriffe, auch eine topologische Ordnung in jedem der Räume festlegen kann. Dies ist möglich mit Hilfe des Begriffes der Wirkungsgebiete. Wir sagen, die Klasse H sei das Wirkungsgebiet von x im Raum G ('$Wgeb\,(H, x, G)$', D7, s. Abb. 5), wenn H die Klasse aller derjenigen Punkte z von G ist, zu denen von einem Punkt y, der später als x ist, ein Signal (d. h. die W-Relation) hinführt, und H nicht leer ist (H ist sozusagen der Durchschnitt von G mit den inneren Punkten des Nachkegels von x):

D7. C. $Wgeb(H,x,G) \equiv Raum(G) \,.\, [H = ((Z|W)(x, —) \,.\, G)] \,.\, \exists(H)$.

Koinzidierende Weltpunkte haben dieselbe räumliche Lage. Daher nehmen wir als Elemente der Raumordnung, als Raumpunkte ('Rmp'), nicht Weltpunkte, sondern Klassen von untereinander koinzidierenden Weltpunkten (das sind die nicht-leeren Äquivalenzklassen in bezug auf K, L34—1b):

D8. C. $Rmp(F) \equiv (\exists\, x)\,(F = K(—, x))$.

Je näher x am Raum G liegt, um so kleiner ist das Wirkungsgebiet von x in G. Daher gibt es an jeder Stelle von G beliebig kleine Wirkungsgebiete. Anderseits kann jeder beliebige Weltpunkt in G durch ein Signal von einer gegebenen Weltlinie aus erreicht werden, sofern man nur einen hinreichend frühen Weltpunkt x auf dieser Weltlinie nimmt. Also gibt es überall in G auch beliebig große Wirkungsgebiete. Daher liegt es nahe, die Wirkungsgebiete als Umgebungen zu nehmen; genauer: die den Wirkungsgebieten entsprechenden Klassen von Raumpunkten. Und zwar wollen wir eine derartige Klasse N als Umgebung jedes zu ihr gehörenden Raumpunktes F im Raum G nehmen:

D9. C. $Umgb(N, F, G) \equiv (\exists\, x)\,(\exists\, H)\,[Wgeb(H, x, G) \,.\, (N \subset Rmp) \,.\, sm_1(N) = H.N(F)]$.

Um zeigen zu können (T40), daß in jedem Raum die soeben definierten Umgebungen ein Hausdorffsches Umgebungssystem bilden (**46**), brauchen wir die Axiome A19 und A20. A19 besagt: Sind y und v zwei nicht-koinzidierende Punkte in einem Raum G, so gibt es Punkte x vor y und u vor v derart, daß kein Punkt von G sowohl durch ein Signal von einem Punkt nach x als auch durch ein Signal von einem Punkt nach u erreicht wird. Hieraus folgt, daß es in G zwei Umgebungen der den Weltpunkten y und v entsprechenden Raumpunkte gibt, die elementfremd sind (T38), nämlich die Umgebungen, die den Wirkungsgebieten von x und von u in G entsprechen.

A19. C. $Raum\,(G) \,.\, Gy \,.\, Gv \,.\, \sim Kyv \supset (\exists\, x)\,(\exists\, u)\,[Zxy \,.\, Zuv \,.\, \sim (\exists\, t)\,[Gt \,.\, (Z \mid W)\,(x, t) \,.\, (Z \mid W)\,(u, t)]]$.

T38. C. $Raum\,(G) \,.\, Rmp\,(F_1) \,.\, Rmp\,(F_2) \,.\, (F_1 \subset G) \,.\, (F_2 \subset G) \,.\, F_1 \neq F_2 \supset (\exists\, N_1)\,(\exists\, N_2)\,[Umgb\,(N_1, F_1, G) \,.\, Umgb\,(N_2, F_2, G) \,.\, \sim \exists\,(N_1 \,.\, N_2)]$.

A20 besagt: Gibt es einen Punkt z im Raum G, zu dem sowohl ein Signal von einem Punkt hinführt, der später ist als x, als auch ein Signal

von einem Punkt, der später ist als y, so gibt es auch einen Punkt u vor G, für den dasselbe gilt. Mit andern Worten: Wenn die Wirkungsgebiete F_1 und F_2 von x und y in G einen Punkt z gemein haben, so gibt es in ihrem Durchschnitt ein Wirkungsgebiet, nämlich das von u. Daraus folgt: Sind N_1 und N_2 Umgebungen von F in G, so gibt es eine Umgebung N_3 von F in G, die Teilklasse von N_1 und N_2 ist (T 39).

A 20. C. $(x)\,(y)\,(G)\,[Raum\,(G)\,.\,(\exists\, z)\,(Gz\,.\,(Z \mid W)\,(x,z)\,.\,(Z \mid W)$ $(y,z)) \supset (\exists\, u)\,(\exists\, v)\,(Gv\,.\,Zuv\,.\,(Z \mid W)\,(x,u)\,.\,(Z \mid W)\,(y,u))]$.

T 39. C. $Raum\,(G)\,.\,Umgb\,(N_1, F, G)\,.\,Umgb\,(N_2, F, G) \supset$ $(\exists\, N_3)\,[Umgb\,(N_3, F, G)\,.\,(N_3 \subset N_1\,.\,N_2)]$.

Von den Umgebungsaxiomen (**46a**) sind auf Grund der Definition von ‚*Umgb*' (D 9) A 1, A 2 und A 4 ohne weiteres erfüllt. Daß A 3 und A 5 erfüllt sind, ist durch T 39 bzw. T 38 gezeigt. (A 5 würde für zwei verschiedene koinzidierende Weltpunkte nicht erfüllt sein; darum müssen wir die Raumpunkte anstatt der Weltpunkte als Elemente des Umgebungssystems nehmen.) Somit bilden in jedem Raum die hier (durch D 9) als Umgebungen definierten Klassen von Raumpunkten ein HAUSDORFFsches Umgebungssystem (T 40). (‚*Hausd*' ist eine logische Konstante, s. **46c**, D 16):

T 40. C. $Raum\,(G) \supset Hausd\,(Umgb\,(—, —, G))$.

Auf dieser Grundlage können wir jetzt alle topologischen Begriffe, die wir früher (**46c**) in bezug auf Umgebungssysteme definiert haben, verwenden. Daher kann eine Beschreibung irgend welcher topologischer Eigenschaften der Räume in Zeichen des AS, also schließlich in den Grundzeichen ‚*K*' und ‚*Z*' formuliert werden. So können wir z. B. jetzt ein Axiom für die Dreidimensionalität jedes Raumes aufstellen. A 21 besagt: In jedem Raum G, in dem die Umgebungen ein HAUSDORFFsches System bilden, hat die Klasse der Raumpunkte von G in bezug auf das Umgebungssystem in G die homogene Dimensionszahl 3 (vgl. **46c**, D 22). T 41 besagt dasselbe ohne die einschränkende Bedingung für G, die ja nach T 40 stets erfüllt ist.

A 21. C. $Raum\,(G)\,.\,Hausd\,(Umgb\,(—, —, G)) \supset Dimhom$ $(3, Rmp\,.\,sub_1\,(G), Umgb\,(—, —, G))$.

T 41. C. $Raum\,(G) \supset Dimhom\,(3, Rmp.sub_1(G), Umgb\,(—, —, G))$.

49. ASe der Raum-Zeit-Topologie: 2. Das *Wlin*-System

Zweite Form: Das *Wlin*-System. Einziges Grundzeichen: ‚***Wlin***'; es bezeichnet die Klasse der Eigenzeitrelationen auf den Weltlinien (vgl. **48b**, D 3). Als Individuen nehmen wir Weltpunkte, hier aber nicht als Teilchenschichten, sondern als die entsprechenden Raum-Zeit-Punkte. Koinzidierende Weltpunkte sind daher hier identisch, so daß die Relation K überflüssig wird. Um dabei doch die verschiedenen Weltlinien voneinander unterscheiden zu können, brauchen wir die Relationenklasse *Wlin* anstatt der Relation Z. Bei dieser Form des Systems wird

besonders deutlich, daß die Axiome des Systems topologische Eigenschaften der Zeitordnung beschreiben, trotzdem aber auch die Beschaffenheit der Raumordnung darzustellen gestatten. (Dieses System und das in **50** sind nur in Sprache C formuliert; sie sind lesbar nach **38** und dazu **46** in diesem Kapitel.)

Die Axiome A1 bis A6 besagen, daß jede der Zeitrelationen *Wlin* irreflexiv, transitiv, ohne Anfangsglied, ohne Endglied, dicht und zusammenhängend ist.

A1. C. $Wlin \subset Irr$.

A2. C. $Wlin \subset Trans$.

A3. C. $Wlin(H) \supset (mem(H) \subset mem_2(H))$.

A4. C. $Wlin(H) \supset (mem(H) \subset mem_1(H))$.

A5. C. $Wlin(H) \supset (H \subset H^2)$.

A6. C. $Wlin \subset Connex$.

Aus A1, A2 und A6 folgt, daß die Relationen *Wlin* Reihen sind:

T1. C. $Wlin \subset Ser$.

Hier kann ‚Z' mit derselben Bedeutung wie das Grundzeichen ‚Z' der ersten Form (**48b**) definiert werden. Hier ist aber Z nicht transitiv; wenn diese Relation zwischen x und y und zwischen y und z besteht, x und z aber zu verschiedenen Weltlinien gehören, so besteht sie nicht zwischen x und z.

D1. C. $Z = sm_2(Wlin)$.

Aus A1 folgt, daß Z irreflexiv ist (T2). Aus A5 folgt, daß Z dicht ist (T3).

T2. C. $Irr(Z)$.

T3. C. $Z \subset Z^2$.

Die im folgenden definierten Zeichen entsprechen den gleichen Zeichen der ersten Form: ‚Wl' bezeichnet die Klasse der Weltlinien, also der Felder der Relationen *Wlin*; ‚*Gen*' bezeichnet die Genidentität, ‚W' die Wirkungsbeziehung:

D2. C. $Wl = mem``Wlin$.

D3. C. $Gen(x, y) \equiv (\exists F)(Wl(F) . Fx . Fy)$.

D4. C. $W = Z^{>0}$.

Die Axiome A7 bis A9 sind hier gleichlautend mit A12 bis A14 im früheren System (**48c**) und sind daher nicht angegeben. Die folgenden Axiome A10, A11 und A12 sind ähnlich den früheren Axiomen A15, A16, A17:

A10. C. $Wl(F) \supset (W``F . \sim F \subset (\sim W)``F)$.

A11. C. $Wl(F) \supset (W^{-1}``F . \sim F \subset (\sim W^{-1})``F)$.

A12. C. $Wl(F) \,.\, Fu \,.\, Fv \,.\, x \neq v \,.\, (F \,.\, Z(—, u) \subset W(—, x)) \,.$
$(F \,.\, Z(v, —) \subset W(x, —)) \,.\, \sim (Wux \,.\, Wxv) \supset u \neq v.$

Aus den genannten Axiomen folgen Theoreme mit demselben Wortlaut wie die früheren T17 bis T22, T24 und T25.

D5 für ,*Glz*', **D6** für ,*Raum*' und **D7** für ,*Wgeb*' lauten wie D5, D6 und D7 der ersten Form (**48d**).

Die Fortsetzung ist analog der ersten Form, aber in mancher Hinsicht wesentlich einfacher. Da koinzidierende Punkte hier identisch sind, brauchen wir nicht zwischen Weltpunkten und Raumpunkten zu unterscheiden. Die Umgebungen können einfach als die Wirkungsgebiete selbst definiert werden:

D8. $Umgb(F, z, G) \equiv (\exists\, x)\,(Wgeb(F, x, G) \,.\, Fz).$

Weitere Axiome (A13 bis A15) sind in Analogie zu solchen der ersten Form (A18 bis A20) aufzustellen. Dabei ergibt sich dann ein Theorem von demselben Wortlaut wie T40 der ersten Form.

A17 ist das Axiom von der homogenen Dreidimensionalität jedes Raumes; es ist etwas einfacher als das entsprechende Axiom der ersten Form (A21):

A17. C. $Raum\,(G) \,.\, Hausd\,(Umgb\,(—, —, G)) \supset Dimhom\,(3, G,$
$Umgb\,(—, —, G)).$

T41 ist analog zu T41 der ersten Form:

T41. C. $Raum\,(G) \supset Dimhom\,(3, G, Umgb\,(—, —, G)).$

50. ASe der Raum-Zeit-Topologie: 3. Das *W*-System

Dritte Form: Das *W*-System. Einziges Grundzeichen: ,*W*' für die Wirkungsrelation. Auch hier nehmen wir, wie in der zweiten Form, koinzidierende Weltpunkte als identisch. Die Begriffe der Genidentität und der Weltlinie treten hier überhaupt nicht auf. Von einem gewissen Gesichtspunkt aus ist dies ein Vorzug dieser Form, da die Anwendung des Begriffes der Genidentität in manchen Fällen problematisch wird (z. B. im materiefreien elektromagnetischen Feld). (Hier ist nur Sprache C angewendet.)

Die ersten Axiome besagen, daß *W* transitiv, irreflexiv, dicht, ohne Anfangsglied und ohne Endglied ist. Die weiteren Axiome sind analog zu solchen der ersten Form. Es genügt aber eine kleinere Anzahl. Wir verzichten hier auf die Angabe der Axiome und geben nur die Definitionen an.

D1, für ,*Glz*', lautet wie D5 der ersten Form (**48d**).

Bei dieser Form des Systems stoßen wir auf eine Schwierigkeit in bezug auf die Definition für ,*Raum*'. Damit jeder Raum hinreichend umfassend ist, wurde in der früheren Definition (D6, **48d**) gefordert, daß ein Raum mit jeder Weltlinie einen Punkt gemein haben muß. Die Schwierigkeit liegt darin, daß wir jetzt keine Weltlinien haben. Wir können aber dasselbe Ziel mit Hilfe des Begriffes der Wirkungslinien (*Wilin*) erreichen.

Eine Wirkungslinie ist eine in *W* enthaltene Reihe, die — das ist das Wesentliche für die Definition von ‚*Raum*' — möglichst umfassend ist, d. h. weder an dem einen noch an dem andern Ende, noch in der Mitte, ein Stück ausläßt. Diese Forderung formulieren wir in der Definition von ‚*Wilin*' (D2) durch die Bedingung, daß eine Wirkungslinie nicht erweiterbar ist, d. h. nicht echte Teilrelation einer Relation ist, die ebenfalls eine Reihe und in *W* enthalten ist.

D2. C. $Wilin\,(H_1) \equiv Ser\,(H_1)\,.\,(H_1 \subset W)\,.\,(H_2)\,[Ser\,(H_2)\,.\,(H_2 \subset W)\,.\,(H_1 \subset H_2) \supset H_1 = H_2]$.

D3. C. $Raum\,(G) \equiv (x)\,(y)\,[Gx\,.\,Gy \supset Glz\,(x, y)]\,.\,(H)\,[Wilin\,(H) \supset \exists\,(G\,.\,mem\,(H))]$.

Die Definition für die Wirkungsgebiete ist analog der in der ersten Form (D7, **48d**), aber einfacher:

D4. C. $Wgeb\,(F, x, G) \equiv Raum\,(G)\,.\,(F = G.W(x, —))\,.\,\exists\,(F)$.

Die Definition für ‚*Umgb*' (D5) lautet hier wie in der zweiten Form (D8 in **49**).

Das Axiom der Dreidimensionalität lautet hier ebenso wie in der zweiten Form (A17, **49**). Daraus ergibt sich das Theorem von der homogenen Dreidimensionalität jedes Raumes gleichlautend mit T41 der zweiten Form:

T1. C. $Raum\,(G) \supset Dimhom\,(3, G, Umgb\,(—, —, G))$.

Wenn wir in T1 mit Hilfe der angegebenen Definitionen alle definierten axiomatischen Zeichen eliminieren und die Formulierung etwas vereinfachen, so erhalten wir das folgende Theorem T2, das ‚*W*' als einziges axiomatisches Zeichen enthält, und sonst nur logische Konstanten und Variable. T2 formuliert somit die Dreidimensionalität der Räume als eine Eigenschaft von *W*:

T2. C. $(V_2\,in\,G \subset \sim W)\,.\,(H_1)\,[Ser\,(H_1)\,.\,(H_1 \subset W)\,.\,(H_2)\,[Ser\,(H_2)\,.\,(H_2 \subset W)\,.\,(H_1 \subset H_2) \supset (H_1 = H_2)] \supset \exists\,(G\,.\,mem\,(H_1))] \supset Dimhom\,(3, G, (\lambda F, z)\,(\exists\,x)\,[(F = G\,.\,W\,(x, —))\,.\,\exists\,(F)\,.\,Fz])$.

Auch jede andere topologische Eigenschaft der Raumordnung läßt sich in dieser Weise als Eigenschaft der Wirkungsrelation ausdrücken. In einem gewissen Sinn kann man daher sagen, daß die Raumordnung die durch die Wirkungsrelation bestimmte Ordnung innerhalb des Gleichzeitigen ist.

51. Determination und Kausalität

51a. Der allgemeine Begriff der Determination. (Formulierung A lesbar nach **19**, Formulierung C nach **33**). Zwei Grundzeichen: ‚*Magn*' und ‚*Sit*'. ‚*Magn* (*f*)': „*f* ist eine Zustandsgröße", d. h. eine Funktion, durch die jeder Stelle des betreffenden Bereiches entweder eine quantitative Größe (s. **41a**), etwa eine reelle Zahl oder ein *n*-tupel von solchen, oder eine Qualität zugeordnet wird. ‚*Sit* (*H*)': „*H* ist eine zweistellige Lagerelation zwischen Stellen"; die Lagerelationen bestimmen die Ord-

nung der Stellen, ihre gegenseitigen Lageverhältnisse, aber nicht ihre Beschaffenheit. Wir nehmen die Stellen als Individuen (oder als Individuen erster Art, falls die Werte der Zustandsgrößen, z. B. reelle Zahlen, als Individuen zweiter Art in einer zweisortigen Sprache genommen werden). Die Individualvariablen ‚*x*' usw. beziehen sich somit auf die Stellen. *H* heißt ein Lagekorrelator zwischen den Klassen *F* und *G* (‚*SitCorr* (*H*, *F*, *G*)'), wenn Folgendes gilt. *F* und *G* sind Klassen von Stellen; wenn K_1 irgend eine Lagerelation ist und K_2 und K_3 die Teilrelationen von K_1 für die Elemente von *F* bzw. von *G* sind, so ist *H* ein Korrelator zwischen K_2 und K_3:

D1. A. $SitCorr\,(H, F, G) \equiv (K_1)\,(K_2)\,(K_3)\,[Sit\,(K_1) \,.\, (x)\,(y)\,(K_2xy \equiv K_1xy \,.\, Fx \,.\, Fy) \,.\, (x)\,(y)\,(K_3xy \equiv K_1xy \,.\, Gx \,.\, Gy) \supset Corr_2\,(H, K_2, K_3)]$.

C. $SitCorr\,(H, F, G) \equiv (K)\,[Sit\,(K) \supset Corr_2\,(H, K\,in\,F, K\,in\,G)]$.

Ein Lagekorrelator *H* zwischen *F* und *G* heißt ein Zustandsgrößenkorrelator zwischen *F* und *G* in bezug auf die Klasse *N* von Zustandsgrößen (‚*MagnCorr* (*H*, *F*, *G*, *N*)'), wenn jede Zustandsgröße der Klasse *N* in jeder Stelle von *F* denselben Wert hat wie in der durch *H* zugeordneten Stelle von *G*:

D2. $MagnCorr\,(H, F, G, N) \equiv SitCorr\,(H, F, G) \,.\, (f)\,(x)\,(y)\,[N(f) \,.\, Hxy \,.\, Fx \,.\, Gy \supset Magn(f) \,.\, (f(x) = f(y))]$.

Die Stellenklasse *F* heißt determinierende Klasse der Stelle *x* in bezug auf die Klasse *N* von Zustandsgrößen (‚*Det* (*F*, *x*, *N*)'), wenn Folgendes gilt. Die Werte der Zustandsgrößen von *N* in *x* sind bestimmt durch ihre Werte in den Stellen von *F* (genauer: wenn irgend eine andere Stelle *y* zu einer andern Stellenklasse *G* dieselben Lagebeziehungen auf Grund eines Lagekorrelators *H* hat wie *x* zu *F*, und wenn *H* zugleich Zustandsgrößenkorrelator zwischen *F* und *G* in bezug auf *N* ist, so haben die Zustandsgrößen von *N* in *y* dieselben Werte wie in *x*):

D3. A. $Det\,(F, x, N) \equiv (f)\,(N(f) \supset Magn(f)) \,.\, (F_2)\,(G_1)\,(G_2)\,(y)\,(H)\,(f)\,[(u)\,(F_2u \equiv Fu \vee u = x) \,.\, (u)\,(G_2u \equiv G_1u \vee u = y) \,.\, SitCorr\,(H, F_2, G_2) \,.\, Hxy \,.\, MagnCorr\,(H, F, G, N) \,.\, N(f) \supset f(x) = f(y)]$.

C. $Det(F,x,N) \equiv (N \subset Magn) \,.\, (G)(y)(H)(f)[SitCorr(H,F\vee\{x\}, G\vee\{y\}) \,.\, Hxy \,.\, MagnCorr(H,F,G,N) \,.\, N(f) \supset f(x) = f(y)]$.

51b. Prinzip der Kausalität. (Nur Formulierung C; lesbar nach **37**.) Mit Hilfe dieser Begriffe und stellenweise solcher aus **48—50** können nun verschiedene Fassungen des Kausalitätsprinzips formuliert werden; nachfolgend werden einige Beispiele gegeben. Hierbei ist vorausgesetzt, daß die vorstehenden Begriffe in folgender Weise interpretiert werden: die Individuen (Stellen) sind Raum-Zeit-Punkte (wir verwenden also die in **39d** erklärte Sprachform III); *Sit* ist die Klasse der geometrischen Relationen zwischen Raum-Zeit-Punkten (z. B. Distanz von 5 cm), *Magn* ist die Klasse der physikalischen Zustandsgrößen (z. B. Temperatur).

1. „Es gibt eine nicht-leere, endliche Klasse N von Zustandsgrößen derart, daß der Zustand in jedem Raum-Zeit-Punkt x in bezug auf N determiniert ist durch den Zustand in bezug auf N in einer Klasse F von Raum-Zeit-Punkten, zu der x nicht gehört":

$$\mathbf{KP_1.\ C.}\ (\exists N)\,(x)\,(\exists F)\,[\exists(N)\,.\,ClsInduct\,(N)\,.\,\sim Fx\,.\,Det\,(F, x, N)].$$

2. Angenommen, es werden einige physikalische Zustandsgrößen genannt und dann M definiert als die Klasse dieser Zustandsgrößen. Kausalitätsprinzip in bezug auf M: „Der Zustand in jedem Raum-Zeit-Punkt x in bezug auf M ist determiniert durch den Zustand in bezug auf M in einer Klasse F, zu der x nicht gehört":

$$\mathbf{KP_2.}\ (x)\,(\exists F)\,[\sim Fx\,.\,Det\,(F, x, M)].$$

3. Wenn wir die Wirkungsrelation W (s. **48c**) zu Hilfe nehmen, können wir das Zeitverhältnis zwischen einem Punkt x und einer determinierenden Klasse F ausdrücken, sei es in bezug auf eine unbestimmt gelassene, endliche Klasse N von Zustandsgrößen, oder in bezug auf eine durch Aufzählung definierte Klasse M. Wir wollen hier der Einfachheit halber den letzteren Weg wählen (wie in KP_2). „Der Zustand in irgend einem Raum-Zeit-Punkt x in bezug auf M ist determiniert durch den Zustand in bezug auf M in einer Klasse F von Punkten, die zeitlich vor x liegen (also zu dem Vorkegel W (—, x) gehören)":

$$\mathbf{KP_3.\ C.}\ (x)\,(\exists F)\,[(F \subset W\,(—, x))\,.\,Det\,(F, x, M)].$$

4. Eine stärkere Behauptung ist die folgende. „Der Zustand in x in bezug auf M ist determiniert durch den Zustand in bezug auf M in einem beliebigen räumlichen Querschnitt F durch den Vorkegel von x" (über ‚*Raum*', s. **48d**):

$$\mathbf{KP_4.\ C.}\ (x)\,(F)\,(G)\,[Raum\,(G)\,.\,(F = G\,.\,W\,(—, x))\,.\,\exists(F) \supset Det\,(F, x, M)].$$

Eine ähnliche, noch stärkere Behauptung besagt dasselbe für einen beliebigen räumlichen Querschnitt durch Vor- oder Nachkegel; hier wird also (im Sinn der klassischen Physik) Determination in beiden Zeitrichtungen angenommen. Für die Formulierung dieser Behauptung ist in KP_4 einfach ‚W (—, x)' durch ‚$(W\,(—, x) \vee W\,(x, —))$' zu ersetzen.

E. ASe der Biologie

52. AS der Dinge und ihrer Teile

52a. Die Dinge und ihre Teile. In **52** und **53** wird ein AS aufgestellt, das ein kleiner Teil (mit einigen Modifikationen) desjenigen AS ist, das WOODGER [Biology] für gewisse Grundbegriffe der Biologie, besonders der Genetik, aufgebaut hat. Dieser Paragraph enthält den e r s t e n T e i l, der sich mit D i n g e n i m a l l g e m e i n e n befaßt, noch nicht spezialisiert für Biologie. Dieses AS kann auch für manche andere Gebiete als Grundlage verwendet werden. Im nächsten Paragraphen wird dieses AS er-

weitert zu einem AS mit gewissen biologischen Grundbegriffen. (**52a** und **b** sind in Formulierung A lesbar nach **17**, in Formulierung C nach **35**.)

Im vorliegenden AS werden Teil- und Zeitbeziehungen zwischen Raum-Zeit-Gebieten behandelt. Diese Gebiete werden als Individuen genommen; wir wenden also die in **39b** erklärte Sprachform I an. Grundzeichen: ‚*P*', ‚*Zg*', ‚*Ding*' (bei Woodger: ‚*P*', ‚*T*', —). Die Deutung für die ersten beiden ist dieselbe wie in **39a**; ‚*Pxy*': „*x* ist ein (räumlicher oder zeitlicher oder raum-zeitlicher) Teil von *y*"; ‚*Zg* (*x*, *y*)': „*x* ist zeitlich früher als *y* (und zwar ist jeder Teil von *x* zeitlich früher als jeder Teil von *y*)"; ‚*Ding* (*x*)': „*x* ist ein Ding".

P ist transitiv:

A1. A. $Pxy \,.\, Pyz \supset Pxz.$
C. $Trans\,(P).$

x heißt Summe der Klasse *F* (‚*Su*(*x*,*F*)'), wenn Folgendes gilt. Die Elemente von *F* sind Teile von *x*; für jeden Teil *y* von *x* gibt es ein Element *z* von *F* derart, daß *y* und *z* mindestens einen gemeinsamen Teil haben:

D1. A. $Su\,(x,F) \equiv (u)\,(Fu \supset Pux)\,.\,(y)\,[Pyx \supset (\exists\, z)\,(\exists\, w)\,(Fz\,.\, Pwy\,.\,Pwz)].$
C. $Su(x,F) \equiv (F \subset P(—,x))\,.\,(y)\,[Pyx \supset (\exists\, z)\,(Fz\,.\,(P^{-1}|P)yz)].$

Jede nicht-leere Klasse hat genau eine Summe:

A2. A. $(\exists\, u)\,(Fu) \supset (\exists\, x)\,(y)\,(Su(y,F) \equiv (y = x)).$
C. $\exists\,(F) \supset 1\,(Su\,(—,F)).$

[A2 zeigt, daß ‚*Su*' so gemeint ist, daß jede Kennzeichnung von der Form ‚*Su*'*Q*' für eine nicht-leere Klasse *Q* die Einzigkeitsbedingung erfüllt. Daher könnte man anstatt des zweistelligen Prädikates ‚*Su*' einen einstelligen Funktor ‚*su*' als Grundzeichen nehmen (**18b**); als (uneigentliche) Summe der leeren Klasse ($su\,(\Lambda)$) müßte man dann ein bestimmtes Gebiet nehmen, etwa das leere Gebiet.]

Einige Theoreme, die aus A1 und A2 folgen. *P* ist total reflexiv:

T1. A. $Pxx.$
C. $Reflex\,(P).$

Sind *x* und *y* Teile voneinander, so sind sie identisch (also besteht *P* zwischen verschiedenen Individuen in höchstens einer Richtung):

T2. A. $Pxy\,.\,Pyx \supset x = y.$
C. $P\,.\,P^{-1} \subset I.$

Die Zeitrelation *Zg* ist asymmetrisch:

A3. A. $Zg\,(x,y) \supset \sim Zg\,(y,x).$
C. $As\,(Zg).$

Ist eine (die) Summe von *F* früher (*Zg*) als eine (die) Summe von *G*, so sind *F* und *G* nicht leer, und jedes Element von *F* ist früher als jedes Element von *G*; und umgekehrt:

A4. A. $(\exists u)(\exists v)[Su(u, F) \,.\, Su(v, G) \,.\, Zg(u, v)] \equiv (\exists x)(Fx) \,.$
$(\exists x)(Gx) \,.\, (x)(y)(Fx \,.\, Gy \supset Zg(x, y))$.
C. $Zg(Su`F, Su`G) \equiv \exists(F) \,.\, \exists(G) \,.\, (x)(y)(Fx \,.\, Gy \supset$
$Zg(x, y))$.

Wenn kein Teil von x später als y ist, so ist jedes Individuum, das später als y ist, auch später als x:

A5. A. $(u)(Pux \supset \sim Zg(y, u)) \supset (v)(Zg(y, v) \supset Zg(x, v))$.
C. $(P(—, x) \subset \sim Zg(y, —)) \supset (Zg(y, —) \subset Zg(x, —))$.

Wenn kein Teil von x früher als y ist, so ist jedes Individuum, das früher als y ist, auch früher als x:

A6. A. $(u)(Pux \supset \sim Zg(u, y)) \supset (v)(Zg(v, y) \supset Zg(v, x))$.
C. $(P(—, x) \subset \sim Zg(—, y)) \supset (Zg(—, y) \subset Zg(—, x))$.

Theoreme. Zg ist transitiv:

T3. A. $Zg(x, y) \,.\, Zg(y, z) \supset Zg(x, z)$.
C. $Trans(Zg)$.

Ist x früher als y, so auch früher als jeder Teil von y:

T4. A. $Zg(x, y) \,.\, Pzy \supset Zg(x, z)$.
C. $Zg \mid P^{-1} \subset Zg$.

Ist x ein Teil von etwas, das früher als z ist, so ist auch x früher als z:

T5. A. $Pxy \,.\, Zg(y, z) \supset Zg(x, z)$.
C. $P \mid Zg \subset Zg$.

Ist x früher als y, so ist jeder Teil von x früher als jeder Teil von y:

T6. A. $Zg(x, y) \,.\, Pux \,.\, Pvy \supset Zg(u, v)$.
C. $P \mid Zg \mid P^{-1} \subset Zg$.

Ist w früher als x, und x ein Teil von y, und y früher als z, so ist w früher als z:

T7. A. $Zg(w, x) \,.\, Pxy \,.\, Zg(y, z) \supset Zg(w, z)$.
C. $Zg \mid P \mid Zg \subset Zg$.

Zg und P schließen sich aus:

T8. A. $Zg(x, y) \supset \sim Pxy$.
C. $Zg \subset \sim P$.

52b. Die Schichten der Dinge. Ein Raum-Zeit-Gebiet x heißt momentan, wenn kein Teil von x früher ist als ein anderer Teil von x:

D2. A. $Mom(x) \equiv (u)(v)(Pux \,.\, Pvx \supset \sim Zg(u, v))$.
C. $Mom(x) \equiv \sim \exists(Zg\, inP(—, x))$.

Jedes Individuum hat momentane Teile:

A7. A. $(x)(\exists y)(Pyx \,.\, Mom(y))$.
C. $\exists(P(—, x) \,.\, Mom)$.

‚$Sch(x, y)$' bedeutet (wie in **39a**): „x ist eine Schicht des Dinges y“. Dies ist dann der Fall, wenn y ein Ding ist und x ein momentaner Teil

von y ist, und zwar ein größter (d. h. ein solcher, der nicht echter Teil eines momentanen Teiles von y ist):

D3. $Sch(x, y) \equiv Ding\,(y) \,.\, Mom\,(x) \,.\, Pxy \,.\, \sim (\exists\, z) \big(Mom\,(z) \,.\, Pzy \,.\, Pxz \,.\, x \neq z\big)$.

Theoreme. Zwei verschiedene Schichten eines Dinges haben keine gemeinsamen Teile:

T9. A. $Sch\,(x, z) \,.\, Sch\,(y, z) \,.\, x \neq y \supset \sim (\exists\, u) \big(Pux \,.\, Puy\big)$.
C. $J \text{ in } Sch\,(—, z) \subset \sim \big(P^{-1} \mid P\big)$.

Von zwei verschiedenen Schichten eines Dinges ist eine früher als die andere:

T10. A. $Sch\,(x, z) \,.\, Sch\,(y, z) \,.\, x \neq y \supset Zg\,(x, y) \vee Zg\,(y, x)$.
C. $Connex\,\big(Zg \text{ in } Sch\,(—, z)\big)$.

Eine Schicht x von y, die früher ist als alle andern Schichten von y, nennen wir eine Anfangsschicht von y („$ASch\,(x, y)$", D4). Eine Schicht x von y, die später ist als alle andern Schichten von y, nennen wir eine Endschicht von y („$ESch\,(x, y)$", D5).

D4. A. $ASch\,(x, y) \equiv Sch\,(x, y) \,.\, (z)\, \big[Sch\,(z, y) \,.\, z \neq x \supset Zg\,(x, z)\big]$.
C. $ASch\,(x, y) \equiv Sch\,(x, y) \,.\, \big(Sch\,(—, y) \,.\, \sim \{x\} \subset Zg\,(x, —)\big)$.

D5. A. $ESch\,(x, y) \equiv Sch\,(x, y) \,.\, (z)\, \big[Sch(z, y) \,.\, z \neq x \supset Zg(z, x)\big]$.
C. $ESch\,(x, y) \equiv Sch\,(x, y) \,.\, \big(Sch(—, y) \,.\, \sim \{x\} \subset Zg(—, x)\big)$.

Axiome. Jedes Ding hat mindestens eine Anfangsschicht (A8) und mindestens eine Endschicht (A9):

A8. A. $Ding\,(x) \supset (\exists\, y)\, ASch\,(y, x)$.
C. $Ding \subset mem_2\,(ASch)$.

A9. A. $Ding\,(x) \supset (\exists\, y)\, ESch\,(y, x)$.
C. $Ding \subset mem_2\,(ESch)$.

Theoreme. Jedes Ding hat genau eine Anfangsschicht (T11, aus A8, T10) und genau eine Endschicht (T12, aus A9, T10):

T11. A. $Ding\,(x) \supset (\exists\, y)\,(z)\, \big(ASch\,(z, x) \equiv (z = y)\big)$.
C. $Ding\,(x) \supset 1\, (ASch\,(—, x))$.

T12. A. $Ding\,(x) \supset (\exists\, y)\,(z)\, \big(ESch\,(z, x) \equiv (z = y)\big)$.
C. $Ding\,(x) \supset 1\, (ESch\,(—, x))$.

Jedes Ding hat mindestens eine Schicht (aus A8):

T13. A. $Ding\,(x) \supset (\exists\, y)\, Sch(y, x)$.
C. $Ding \subset mem_2\,(Sch)$.

Ist y ein momentaner Teil eines Dinges x, so gibt es genau eine Schicht z von x, von der y ein Teil ist:

T14. A. $Ding\,(x) \,.\, Pyx \,.\, Mom\,(y) \supset (\exists\, z)\,(u)\, \big[Sch(u, x) \,.\, Pyu \equiv (u = z)\big]$.
C. $Ding\,(x) \,.\, Pyx \,.\, Mom\,(y) \supset 1\, \big(Sch(—, x) \,.\, P(y, —)\big)$.

Jedes Ding ist identisch mit der Summe seiner Schichten:

T15. **A.** $Ding\,(x)\,.\,(y)\,\big(Fy \equiv Sch(y,\,x)\big) \supset (z)\,\big(Su(z,\,F) \equiv (z = x)\big)$.

C. $Ding\,(x) \supset x = Su\text{'}Sch(—,\,x)$.

52c. Zeitrelation. (Nur in Sprache C; lesbar nach **38.**)

Theorem. Die Zeitrelation *Zg* für die Schichten eines Dinges ist eine Reihe (aus A3, T3, T10):

T16. **C.** $Ser\,\big(Zg\ in\ Sch\,(—,\,z)\big)$.

Axiome. Zwischen zwei verschiedenen Schichten eines Dinges gibt es stets eine dritte:

A10. **C.** $\big(Zg\ in\ Sch\,(—,\,z)\big) \subset \big(Zg\ in\ Sch\,(—,\,z)\big)^2$.

Zg für die Schichten eines Dinges ist eine DEDEKINDsche Relation.

A11. **C.** $Ded\,\big(Zg\ in\ Sch\,(—,\,x)\big)$.

Theorem. *Zg* für die Schichten eines Dinges ist eine Reihe von DEDEKINDscher Stetigkeit (aus T16, A10, A11):

T17. **C.** $SerDed\,\big(Zg\ in\ Sch\,(—,\,x)\big)$.

53. AS einiger biologischer Begriffe

53a. Teilung und Verschmelzung. Im Anschluß an WOODGER [Biology] wird hier das in **52** dargestellte AS durch Einführung einiger neuer Grundzeichen und Axiome zu einem biologischen AS erweitert. Wir geben hier nur den ersten Teil von WOODGERS AS an. (**53a** ist lesbar in Formulierung A nach **19**, in Formulierung C nach **35.**)

Neue Grundzeichen: ‚*Org*', ‚*Y*', ‚*Zelle*', ‚*Orgs*'. Erläuterung: ‚*Org* (*x*)': „*x* ist eine organische Einheit (z. B. ein Organismus, ein Organ, eine Zelle)"; ‚*Yxy*': „Die organische Einheit *x* geht in die organische Einheit *y* über, d. h. entweder *x* zerteilt sich in mehrere Einheiten und *y* ist eine von diesen, oder *y* entsteht durch Verschmelzung von *x* mit einer oder mehreren andern Einheiten (man denke an Zellteilung und Zellvereinigung als Beispiele)"; ‚*Zelle* (*x*)': „*x* ist eine Zelle"; ‚*Orgs* (*x*)': „*x* ist ein Organismus". Eine Zelle wird hier aufgefaßt als ein Ding, also zeitlich ausgedehnt, im Unterschied zu den Schichten von Zellen $\big(Sch\text{''}\,Zelle\big)$; dasselbe gilt von den Organismen. Die Zeitdauer einer organischen Einheit, also auch einer Zelle oder eines Organismus, wird gerechnet vom Augenblick der Entstehung durch Zerteilung oder Verschmelzung bis zum Ende, z. B. durch Zerteilung oder Verschmelzung mit anderen Einheiten gleicher Art.

Axiome. Jede organische Einheit ist ein Ding:

A12. **A.** $Org\,(x) \supset Ding\,(x)$.

C. $Org \subset Ding$.

Die Glieder von *Y* sind organische Einheiten:

A13. **A.** $Yxy \supset Org(x)\,.\,Org(y)$.

C. $mem\,(Y) \subset Org$.

Wenn Yxy, und u ist Endschicht von x, und v ist Anfangsschicht von y, so sind u und v verschieden und entweder u ist Teil von v oder v ist Teil von u:

A14. A. $Yxy \,.\, ESch\,(u, x) \,.\, ASch\,(v, y) \supset u \neq v \,.\, (Puv \vee Pvu)$.
C. $ESch \mid Y \mid ASch^{-1} \subset (P \vee P^{-1}) \,.\, J$.

Wir definieren nun Teilung (Division, ‚Dv') und Verschmelzung (Fusion ‚Fs'). Wir sagen, x gehe durch Teilung (Division) in y über (‚$Dv\,(x, y)$'), wenn Yxy und eine (die) Anfangsschicht von y Teil einer (der) Endschicht von x ist (D6). Wir sagen, x gehe durch Verschmelzung (Fusion) in y über (‚$Fs\,(x, y)$'), wenn Yxy und eine (die) Endschicht von x Teil einer (der) Anfangsschicht von y ist (D7).

D6. A. $Dv\,(x, y) \equiv Yxy \,.\, (\exists u)\,(\exists v)\,[ESch\,(u, x) \,.\, ASch\,(v, y) \,.\, Pvu]$.
C. $Dv = Y \,.\, (ESch^{-1} \mid P^{-1} \mid ASch)$.

D7. A. $Fs\,(x, y) \equiv Yxy \,.\, (\exists u)\,(\exists v)\,[ESch\,(u, x) \,.\, ASch\,(v, y) \,.\, Puv]$.
C. $Fs = Y \,.\, (ESch^{-1} \mid P \mid ASch)$.

Mit Hilfe dieser Definitionen können die nächsten Axiome einfacher formuliert werden.

Wenn x durch Teilung in y übergeht, so ist x das einzige Element, das in Y zu y steht:

A15. A. $Dv\,(x, y) \supset (u)\,(Yuy \equiv (u = x))$.
C. $Dv\,(x, y) \supset x = Y\text{‘}y$.

Wenn x durch Teilung in y übergeht, so gibt es ein von y verschiedenes z derart, daß x durch Teilung in z übergeht:

A16. A. $Dv\,(x, y) \supset (\exists z)\,[z \neq y \,.\, Dv\,(x, z)]$.
C. $Dv \subset Dv \mid J$.

Wenn x durch Verschmelzung in y übergeht, so ist y das einziges Element, zu dem x in Y steht:

A17. A. $Fs\,(x, y) \supset (u)\,(Yxu \equiv (u = y))$.
C. $Fs\,(x, y) \supset y = Y^{-1}\text{‘}x$.

Wenn x durch Verschmelzung in y übergeht, so gibt es ein von x verschiedenes z, das durch Verschmelzung in y übergeht:

A18. A. $Fs\,(x, y) \supset (\exists z)\,[z \neq x \,.\, Fs\,(z, y)]$.
C. $Fs \subset J \mid Fs$.

Theoreme. Y ist die Disjunktion von Dv und Fs:

T18. A. $Yxy \equiv Dv\,(x, y) \vee Fs\,(x, y)$.
C. $Y = Dv \vee Fs$.

Y ist irreflexiv (T19), intransitiv (T20) und asymmetrisch (T21):

T19. A. $\sim Yxx$.
C. $Irr\,(Y)$.

T20. A. $Yxy \,.\, Yyz \supset \sim Yxz$.
C. $Intr\,(Y)$.

T21. A. $Yxy \supset \sim Yyx$.
C. $As\,(Y)$.

Dv ist voreindeutig (T22) und asymmetrisch (T23):

T22. $Un_1\,(Dv)$.

T23. A. $Dv\,(x, y) \supset \sim Dv\,(y, x)$.
C. $As\,(Dv)$.

Fs ist nacheindeutig (T24) und asymmetrisch (T25):

T24. $Un_2\,(Fs)$.

T25. A. $Fs\,(x, y) \supset \sim Fs\,(y, x)$.
C. $As\,(Fs)$.

Dv und *Fs* haben keine gemeinsamen Erstglieder (d. h. kein Individuum kommt sowohl zu einer Teilung als auch zu einer Verschmelzung) (T26) und keine gemeinsamen Zweitglieder (d. h. kein Individuum entsteht sowohl durch Teilung als durch Verschmelzung) (T27):

T26. A. $\sim (\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(\exists\, z)\,[Dv\,(x, y)\,.\,Fs\,(x, z)]$.
C. $\sim \exists\,(mem_1\,(Dv)\,.\,mem_1\,(Fs))$.

T27. A. $\sim (\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(\exists\, z)\,[Dv\,(x, z)\,.\,Fs\,(y, z)]$.
C. $\sim \exists\,(mem_2\,(Dv)\,.\,mem_2\,(Fs))$.

53b. Hierarchien, Zellen, Organismen. (Formulierung A, die hier nur für D11 und die Axiome verwendet wird, ist lesbar nach **19**, Formulierung C nach **36**). Wir wollen jetzt den logischen Begriff der Hierarchie definieren, der vor allem in der Biologie nützlich ist. Eine Relation *H* heißt eine Hierarchie (‚*Hier* (*H*)'), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: *H* ist asymmetrisch und voreindeutig; *H* hat genau ein Anfangsglied; jedes Glied ist vom Anfangsglied aus in endlich vielen *H*-Schritten erreichbar. Der Begriff der Hierarchie ist verwandt mit dem der Progression (**37a**); der Unterschied besteht darin, daß eine Progression auch noch nacheindeutig und daher eineindeutig ist und kein Endglied hat, während bei einer Hierarchie Gabelungen in der Richtung vom Anfangsglied weg zugelassen sind und Endglieder vorkommen können.

D8. C. $Hier\,(H) \equiv As\,(H)\,.\,Un_1\,(H)\,.\,1\,(init\,(H))\,.\,(x)\,(y)\,[init\,(H)\,x\,.\,mem_2\,(H)\,y \supset H^{>0}\,(x, y)]$.

Wenn x ein Erstglied von *Dv* ist, so ist die Relation *Dv* innerhalb der *Dv*-Nachkommenschaft von x (**36c**) eine Hierarchie:

T28. C. $mem_1\,(Dv)\,x \supset Hier\,(Dv\ in\ Dv^{\geqq 0}\,(x, —))$.

Eine derartige Hierarchie wird eine *Dv*-Hierarchie genannt:

D9. C. $DvHier\,(H) \equiv (\exists\, x)\,[mem_1\,(Dv)\,x\,.\,(H = Dv\ in\ Dv^{\geqq 0}\,(x, —))]$.

Eine Teilrelation *H* von *Y* heißt baumförmig (dendritisch, ‚*Dend* (*H*)'), wenn sie dadurch gebildet ist, daß man ein beliebiges *Y*-Glied x wählt und das Feld von *Y* auf diejenigen Elemente beschränkt, die von x aus

durch eine endliche Kette, die in beliebiger Weise aus Y- und Y^{-1}-Schritten zusammengesetzt ist, erreichbar sind:

D10. C. $Dend\,(H) \equiv (\exists\, x)\,[mem\,(Y)\,x\,.$
$(H = Y\ in\ [(Y \vee Y^{-1})^{\geqq 0}(x, —)])]$.

Wenn baumförmige Relationen ein gemeinsames Glied haben, so sind sie identisch:

T29. C. $Dend\,(H)\,.\,Dend\,(K)\,.\,\exists\,(mem\,(H)\,.\,mem\,(K)) \supset H = K$.

Wir sagen, x sei ein organischer Teil von y (‚$OP\,(x, y)$'), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: x und y sind verschiedene organische Einheiten; mehr als eine Schicht von x ist ein Teil von y; wenn u eine Schicht von x und v eine Schicht von y ist derart, daß u weder früher noch später als v ist, so ist u ein Teil von v:

D11. $OP\,(x, y) \equiv Org\,(x)\,.\,Org\,(y)\,.\,x \neq y\,.\,(\exists\, w)\,(\exists\, z)\,(w \neq z\,.$
$Sch\,(w, x)\,.\,Sch\,(z, x)\,.\,Pwy\,.\,Pzy)\,.\,(u)\,(v)\,[Sch\,(u, x)\,.\,Sch\,(v, y)\,.$
$\sim Zg\,(x, y)\,.\,\sim Zg\,(y, x) \supset Puv]$.

Wenn eine organische Einheit Teil einer andern organischen Einheit ist, so ist sie organischer Teil von ihr:

T30. C. $[(P\,.\,J)\ in\ Org] \subset OP$.

Es folgen einige Axiome für ‚*Zelle*' (Zelle) und ‚*Orgs*' (Organismus). Für jede Zelle y gibt es eine Zelle x derart, daß Yxy (d. h. daß y aus x durch Teilung oder Verschmelzung entsteht):

A19. A. $Zelle(y) \supset (\exists\, x)\,(Zelle(x)\,.\,Yxy)$.
C. $Zelle \subset mem_2(Y\ in\ Zelle)$.

Jeder Organismus hat eine Zelle als (echten oder unechten) Teil:

A20. A. $Orgs\,(x) \supset (\exists\, y)\,(Zelle\,(y)\,.\,Pyx)$.
C. $Orgs\,(x) \supset \exists\,(Zelle\,.\,P\,(—, x))$.

Jede Zelle ist ein Organismus oder ein organischer Teil eines solchen:

A21. A. $Zelle\,(x) \supset Orgs(x) \vee (\exists\, y)\,(Orgs\,(y)\,.\,OP(x, y))$.
C. $Zelle \subset (Orgs \vee OP``Orgs)$.

Wenn x ein Organismus ist, dessen Anfangsschicht Anfangsschicht einer Zelle ist, die durch Verschmelzung entstanden ist (d. h. wenn x mit einem Zygoten beginnt), dann ist x nicht durch Teilung entstanden:

A22. A. $Orgs\,(x)\,.\,(\exists\, y)\,(\exists\, z)\,(\exists\, u)\,[ASch\,(y, x)\,.\,Zelle\,(z)\,.$
$ASch\,(y, z)\,.\,Fs\,(u, z)] \supset \sim (\exists\, v)\,Dv\,(v, x)$.
C. $Orgs\,(x)\,.\,(\exists\, z)\,[(Zelle\,.\,mem_2(Fs))\,z\,.\,ASch`x = ASch`z] \supset$
$\sim mem_2\,(Dv)\,x$.

Die Organismen sind organische Einheiten:

A23. A. $Orgs\,(x) \supset Org\,(x)$.
C. $Orgs \subset Org$.

Daß die Zellen organische Einheiten sind, folgt aus A21 und A19:

T31. C. $Zelle \subset Org$.

54. AS der Verwandtschaftsbegriffe

54a. Biologische Verwandtschaftsbegriffe. Das hier aufgestellte AS behandelt die Verwandtschaftsbeziehungen zwischen Menschen, und zwar zunächst (**54a**) biologische Verwandtschaftsbegriffe, später (**54b**) auch juristische. Wir nehmen hierbei Dinge, und insbesondere die Menschen, als Individuen, wenden also die in **39b** erklärte einfache Sprachform I A an. Infolgedessen können Zeitverhältnisse hier nicht zum Ausdruck gebracht werden. (Für ASe, in denen die Verwandtschaftsbegriffe weiter analysiert werden und die auch Zeitverhältnisse berücksichtigen, s. **55d**, Aufgaben 30 bis 32.) Die biologischen Begriffe sind hier in folgendem Sinn gemeint: x heißt Vater von y, wenn x y gezeugt hat; x heißt Mutter von y, wenn x y geboren hat; x heißt Gatte von y, wenn x mit y ein Kind gezeugt hat, usw. [**54a** ist lesbar in Formulierung A, soweit sie angewendet wird, nach **17**, in Formulierung C nach **36**.]

Grundzeichen: ‚*Elt*' und ‚*Ml*' für die Elternrelation und die Klasse der männlichen Menschen. Definitionen für ‚*Me*' (Mensch), ‚*Wl*' (weiblicher Mensch), ‚*Va*' (Vater), ‚*Ki*' (Kind), ‚*So*' (Sohn), ‚*GrElt*' (Großelter) in Sprache A s. **15c**; für ‚*Bru*' (Bruder) **17b**. In ähnlicher Weise können leicht definiert werden: ‚*To*' (Tochter), ‚*GrVa*' (Großvater), ‚*GrMu*' (Großmutter), ‚*Schw*' (Schwester), ‚*Geschw*' (Geschwister); ferner Enkelkind, Enkelsohn, Enkeltochter usw. Definitionen in Sprache C für einige der genannten Begriffe und einige weitere Begriffe s. **30c**. Wir geben hier Definitionen für ‚*Mu*' (Mutter), ‚*Vf*' (Vorfahre), ‚*Nk*' (Nachkomme) (die beiden Letzteren nur in Formulierung C, vgl. **36b**), ‚*Ga*' (Gatte im biologischen Sinn, s. oben), ‚*Gn*' (Gattin, ebenso):

D1. $Mu\,(x, y) \equiv Elt\,(x, y) \,.\, Wl\,(x)$.

D2. C. $Vf = Elt^{>0}$.

D3. C. $Nk = Ki^{>0}$.

D4. A. $Ga(x, y) \equiv (\exists z)\,(Va(x, z) \,.\, Mu(y, z))$.
C. $Ga = Va \mid Mu^{-1}$.

D5. A. $Gn(x, y) \equiv Ga(y, x)$.
C. $Gn = Ga^{-1}$.

Einige Theoreme ergeben sich schon aus den genannten Definitionen noch bevor wir Axiome aufstellen; diese Theoreme sind somit beweisbar im logischen Grundkalkül (**42a**) und daher L-wahr.

Jeder Mensch ist männlich oder weiblich; und umgekehrt, jeder männliche oder weibliche Mensch ist ein Mensch.

T1. A. $Me(x) \equiv Ml(x) \vee Wl(x)$.
C. $Me = Ml \vee Wl$.

Ein Elter von jemandem ist entweder dessen Vater oder dessen Mutter; und umgekehrt:

T2. A. $Elt(x, y) \equiv Va(x, y) \vee Mu(x, y)$.
C. $Elt = Va \vee Mu$.

Ml und *Wl* schließen sich aus (T3), daher auch *Va* und *Mu* (T4):

T3. A. $\sim (\exists\, x)\,(Ml\,(x)\,.\,Wl\,(x))$.
C. $\sim \exists\,(Ml\,.\,Wl)$.

T4. A. $\sim (\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(Va\,(x, y)\,.\,Mu\,(x, y))$.
C. $\sim \exists\,(Va\,.\,Mu)$.

Ga ist asymmetrisch (dasselbe gilt für *Gn*; beide Relationen sind daher auch irreflexiv):

T5. A. $Ga(x, y) \supset \sim Ga(y, x)$.
C. $As\,(Ga)$.

Axiome. *Va* ist voreindeutig, d. h. jeder hat höchstens einen Vater (A1). *Mu* ist voreindeutig (A2). *Vf* ist irreflexiv, d. h. niemand ist sein eigener Vorfahre (A3).

A1. A. $Va\,(x, z)\,.\,Va\,(y, z) \supset x = y$.
C. $Un_1\,(Va)$.

A2. A. $Mu\,(x, z)\,.\,Mu\,(y, z) \supset x = y$.
C. $Un_1\,(Mu)$.

A3. A. $\sim Vf\,(x, x)$.
C. $Irr\,(Vf)$.

Theoreme. Aus A1 und A2 folgt, daß jeder höchstens zwei Eltern hat (T7) und daß, wenn jemand zwei Eltern hat, diese sein Vater und seine Mutter sind (T8):

T7. C. $\sim 3_m\,(Elt\,(—, x))$.

T8. C. $2\,(Elt\,(—, x)) \supset (\exists\, u)\,(\exists\, v)\,[Elt\,(—, x) = \{u; v\}\,.\,u = Va‘x\,.\,v = Mu‘x]$.

Aus A3 folgt, daß die folgenden Relationen irreflexiv und asymmetrisch sind: Vorfahre, Elter, Vater, Mutter, Nachkomme, Kind, Sohn, Tochter; ferner auch alle Potenzen der genannten Relationen: Großelter, Großgroßelter, Großvater usw.:

T9. C. $\{Vf; Elt; Va; Mu; Nk; Ki; So; To; Elt^2; Elt^3; \ldots\} \subset Irr\,.\,As$.

54b. Juristische Verwandtschaftsbegriffe. Wir erweitern jetzt das System von **54a** durch Hinzufügung juristischer Begriffe. Zusätzliche Grundzeichen: ‚*LElt*‘ und ‚*LGa*‘; ‚*LElt* (*x*, *y*)‘ heißt: „*x* ist ein legaler Elter (d. h. legaler Vater oder legale Mutter) von *y*“; ‚*LGa* (*x*, *y*)‘ heißt: „*x* ist legaler Ehegatte von *y* (d. h. der Mann *x* ist zu irgend einer Zeit seines Lebens mit der Frau *y* legal verheiratet)“. **[54b** ist lesbar in Formulierung A, ohne D39 und 40, nach **17**, in Formulierung C nach **36.]**

Wir definieren zunächst einige weitere juristische Begriffe: ‚*LVa*‘ (legaler Vater), ‚*LKi*‘ (legales Kind), ‚*LSo*‘ (legaler Sohn), ‚*LGn*‘ (legale Gattin), ‚*LEh*‘ (legaler Ehepartner), ‚*EElt*‘ (ehelicher Elter), ‚*EVa*‘ (ehelicher Vater), ‚*EKi*‘ (eheliches Kind), ‚*ESo*‘ (ehelicher Sohn), ‚*EGeschw*‘ (eheliches Geschwister), ‚*EBru*‘ (ehelicher Bruder), ‚*SchElt*‘ (Schwiegerelter), ‚*SchVa*‘ (Schwiegervater), ‚*SchKi*‘ (Schwiegerkind), ‚*SchSo*‘

(Schwiegersohn), ‚*SchwaSchwae*' (Schwager oder Schwägerin), ‚*Schwa*' (Schwager), ‚*StElt*' (Stiefelter), ‚*StVa*' (Stiefvater), ‚*StKi*' (Stiefkind), ‚*StSo*' (Stiefsohn), ‚*StGeschw*' (Stiefgeschwister), ‚*StBru*' (Stiefbruder), ‚*OnTa*' (Onkel oder Tante), ‚*On*' (Onkel), ‚*NeNi*' (Neffe oder Nichte), ‚*Ne*' (Neffe), ‚*VeBa*' (Vetter oder Base), ‚*Ve*' (Vetter), ‚*EGrElt*' (ehelicher Großelter), ‚*EGrVa*' (ehelicher Großvater), ‚*EEnk*' (eheliches Enkelkind), ‚*EEnkSo*' (ehelicher Enkelsohn). Definitionen in Analogie zu D6, 8, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36 und 38 für die entsprechenden Relationen weiblicher Personen (‚*LMu*' (legale Mutter) usw.) können leicht aufgestellt werden, indem im Definiens ‚*Ml*' durch ‚*Wl*' ersetzt wird.

D6. $LVa(x, y) \equiv LElt(x, y) \,.\, Ml(x)$.

D7. A. $LKi(x, y) \equiv LElt(y, x)$.
C. $LKi = LElt^{-1}$.

D8. $LSo(x, y) \equiv LKi(x, y) \,.\, Ml(x)$.

D9. $LGn(x, y) \equiv LGa(y, x)$.

D10. A. $LEh\,(x, y) \equiv LGa\,(x, y) \vee LGn\,(x, y)$.
C. $LEh = LGa \vee LGn$.

D11. A. $EElt(x, y) \equiv LElt(x, y) \,.\, (\exists z)\,(LEh(x, z) \,.\, LElt(z, y))$.
C. $EElt = LElt \,.\, (LEh \mid LElt)$.

D12. $EVa(x, y) \equiv EElt(x, y) \,.\, Ml(x)$.

D13. $EKi(x, y) \equiv EElt(y, x)$.

D14. $ESo(x, y) \equiv EKi(x, y) \,.\, Ml(x)$.

D15. A. $EGeschw(x, y) \equiv (\exists u)\,(\exists v)\,(EKi(x, u) \,.\, EVa(u, y) \,.\, EKi(x, v) \,.\, EMu(v, y) \,.\, x \neq y)$.
C. $EGeschw = (EKi \mid EVa) \,.\, (EKi \mid EMu) \,.\, J$.

D16. $EBru(x, y) \equiv EGeschw(x, y) \,.\, Ml(x)$.

D17. A. $SchElt(x, y) \equiv (\exists z)\,(EElt(x, z) \,.\, LEh(z, y))$.
C. $SchElt = EElt \mid LEh$.

D18. $SchVa(x, y) \equiv SchElt(x, y) \,.\, Ml(x)$.

D19. $SchKi(x, y) \equiv SchElt(y, x)$.

D20. $SchSo(x, y) \equiv SchKi(x, y) \,.\, Ml(x)$.

D21. A. $SchwaSchwae(x, y) \equiv (\exists z)\,[(EGeschw(x, z) \,.\, LEh(z, y)) \vee (LEh(x, z) \,.\, EGeschw(z, y))]$.
C. $SchwaSchwae = (EGeschw \mid LEh) \vee (LEh \mid EGeschw)$.

D22. $Schwa(x, y) \equiv SchwaSchwae(x, y) \,.\, Ml(x)$.

D23. A. $StElt(x, y) \equiv (\exists z)\,(LEh(x, z) \,.\, LElt(z, y)) \,.\, \sim LElt(x, y)$.
C. $StElt = (LEh \mid LElt) \,.\, \sim LElt$.

D24. $StVa(x, y) \equiv StElt(x, y) \,.\, Ml(x)$.

D25. $StKi(x, y) \equiv StElt(y, x)$.

D26. $StSo(x, y) \equiv StKi(x, y) \,.\, Ml(x)$.

D27. A. $StGeschw(x, y) \equiv (\exists z)\,\big(LKi(x, z) \,.\, LElt(z, y)\big) \,.\, x \neq y \,.\, \sim EGeschw\,(x, y)$.

C. $StGeschw = \big(LKi \mid LElt\big) \,.\, J \,.\, \sim EGeschw$.

D28. $StBru(x, y) \equiv StGeschw(x, y) \,.\, Ml(x)$.

D29. A. $OnTa(x, y) \equiv (\exists z)\,\big[\big(EGeschw(x, z) \vee SchwaSchwae(x, z)\big) \,.\, EElt(z, y)\big]$.

C. $OnTa = \big(EGeschw \vee SchwaSchwae\big) \mid EElt$.

D30. $On(x, y) \equiv OnTa(x, y) \,.\, Ml(x)$.

D31. $NeNi(x, y) \equiv OnTa(y, x)$.

D32. $Ne(x, y) \equiv NeNi(x, y) \,.\, Ml(x)$.

D33. A. $VeBa(x, y) \equiv (\exists u)\,(\exists v)\,\big(EKi(x, u) \,.\, EGeschw(u, v) \,.\, EElt\,(v, y)\big)$.

C. $VeBa = EKi \mid EGeschw \mid EElt$.

D34. $Ve(x, y) \equiv VeBa(x, y) \,.\, Ml(x)$.

D35. A. $EGrElt(x, y) \equiv (\exists z)\,\big(EElt(x, z) \,.\, EElt(z, y)\big)$.

C. $EGrElt = EElt^2$.

D36. $EGrVa(x, y) \equiv EGrElt(x, y) \,.\, Ml(x)$.

D37. $EEnk(x, y) \equiv EGrElt(y, x)$.

D38. $EEnkSo(x, y) \equiv EEnk(x, y) \,.\, Ml(x)$.

Die Definitionen für ‚*EVf*' (ehelicher Vorfahre) und ‚*ENk*' (ehelicher Nachkomme) geben wir nur in Formulierung C; sie sind analog zu D2 und D3:

D39. C. $EVf = EElt^{>0}$.

D40. C. $ENk = EVf^{-1}$.

Auch hier, wie in **54a**, ergeben sich viele Theoreme allein aus den Definitionen, ohne Verwendung von Axiomen; wir wollen sie hier nicht anführen.

Axiome. Man könnte zunächst denken, daß für die juristischen Begriffe analoge Axiome gälten wie für die entsprechenden biologischen Begriffe (A1 bis A3 in **54a**). Das ist aber nicht der Fall. Die Relationen *LVa*, *LMu*, *EVa* und *EMu* sind nicht voreindeutig, da diese legalen Beziehungen im Lauf der Zeit aufgelöst und durch Beziehungen zu andern Personen ersetzt werden können. Auch ist die Relation *LVf* nicht unbedingt irreflexiv; obwohl es wohl kaum vorkommen wird, daß jemand zu einem bestimmten Zeitpunkt sein eigener legaler Großvater ist, so ist es doch im allgemeinen nicht ausgeschlossen, daß zwischen zwei (ungefähr gleichaltrigen) Männern *a* und *b* die legale (Adoptiv-)Vaterschaft zuerst in der einen Richtung besteht, später aufgelöst wird und dann in der

andern Richtung erklärt wird; in diesem Fall würde *LGrVa* (*a*, *a*) gelten. [Dies ist nur dann ausgeschlossen, wenn besondere gesetzliche Bedingungen für die Adoption festgelegt sind, etwa in bezug auf einen Mindestunterschied im Alter.] Ferner bestehen auch keine einfachen Beziehungen zwischen *Va* und *LVa*, da jede dieser beiden Relationen ohne die andere vorkommen kann; dasselbe gilt auch für *Mu* und *LMu*, *Ga* und *LGa* usw. Jedoch ergeben sich Axiome aus den üblichen gesetzlichen Bestimmungen, die die legale Elternschaft und die legale Ehe in bestimmten Fällen ausschließen; hiervon sind im folgenden einige Beispiele angegeben (A4 bis 10).

Bei einer legalen Ehe ist der Ehegatte männlich (A4), die Ehegattin weiblich (A5):

A4. A. $LGa\,(x, y) \supset Ml\,(x)$.
C. $mem_1\,(LGa) \subset Ml$.

A5. A. $LGa\,(x, y) \supset Wl\,(y)$.
C. $mem_2\,(LGa) \subset Wl$.

Eheschließungsverbote: *x* kann *y* nicht heiraten, wenn *x* Vater (im biologischen Sinn) von *y* ist (A6), oder Sohn (A7), oder Bruder (A8):

A6. A. $Va\,(x, y) \supset \sim LGa\,(x, y)$.
C. $Va \subset \sim LGa$.

A7 und 8 sind analog zu formulieren.

Legale Elternschaft ist ausgeschlossen im Fall der Identität (A9), der Geschwisterrelation (A10) und gewisser anderer Verwandtschaftsbeziehungen:

A9. A. $\sim LElt\,(x, x)$.
C. $Irr\,(LElt)$.

A10. A. $Geschw\,(x, y) \supset \sim LElt\,(x, y)$.
C. $Gesch \subset \sim LElt$.

Manche Eheschließungsverbote können in dem vorliegenden einfachen System nicht ausgedrückt werden, weil sie Zeitbestimmungen enthalten. Hierher gehören z. B. das Verbot der Bigamie, das Verbot der Heirat zwischen *x* und *y*, wenn *x* legaler Vater, legaler Sohn, ehelicher Bruder oder Stiefbruder von *y* ist (alle diese enthalten den Begriff der Gleichzeitigkeit), ferner die Bestimmung eines Mindestalters für Heirat. Dasselbe gilt für Beschränkungen ähnlicher Art in bezug auf legale Elternschaft (im Fall der Adoption). Alle diese Bedingungen erfordern für ihre Formulierung eine kompliziertere Sprachform (vgl. **55d**, Aufgabe 32).

Anhang

55. Übungsaufgaben zur Anwendung der symbolischen Logik

„AS“ ist Abkürzung für „Axiomensystem“. Der Schwierigkeitsgrad jeder Aufgabe ist durch „[Schw. I]“ usw. angegeben: I sehr leicht, II leicht, III mittelschwierig, IV sehr schwierig.

55a. Mengenlehre und Arithmetik

Aufgabe 1. [Schw. IV.] AS der Mengenlehre nach J. v. NEUMANN (s. **43**). Anstatt ‚$[x, y]$‘ nehmen wir entweder ‚$R'y$‘ oder ‚$k(y)$‘. Grundzeichen ‚E‘ wie in **43a**.

Aufgabe 2. [Schw. III.] Aufstellung einer Sprachform für rationale Zahlen durch Ergänzung einer früher angegebenen Koordinatensprache (vgl. **40d**, „erster Weg“, s. Hinweise auf RUSSELL und WAISMANN).

a. Für positive rationale Zahlen als Paare natürlicher Zahlen, auf Grund der Sprachform von **40a, b**.

b. Für positive und negative rationale Zahlen als Paare ganzer Zahlen, auf Grund der Sprachform von **40c**.

Aufgabe 3. [Schw. III.] Fortführung von Aufgabe 2: Einführung von reellen Zahlen als Klassen von rationalen Zahlen (vgl. **40d**, RUSSELL und WAISMANN).

a. Für positive reelle Zahlen, als Fortsetzung von Aufgabe 2a.

b. Für positive und negative reelle Zahlen, als Fortsetzung von Aufgabe 2b.

Aufgabe 4. [Schw. II.] AS der reellen Zahlen nach HILBERT (s. **45**).

Aufgabe 5. [Schw. II.] AS der Theorie der Größen (vgl. auch **41**).

a. „Relativistisch“. RUSSELL [Principles] 162, COUTURAT [Prinzipien] 106.

b. „Absolutistisch“. RUSSELL [Principles] 164, COUTURAT [Prinzipien] 108.

Aufgabe 6. [Schw. III.] AS der extensiven Größen. COUTURAT [Prinzipien] 113f. (Im Anschluß an BURALI-FORTI.)

55 b. Geometrie

Aufgabe 7. [Schw. II.] Definitionen für weitere Begriffe der Topologie (Punktmengenlehre) auf Grund des Begriffes der Umgebung, im Anschluß an **46**, nach HAUSDORFF [Grundzüge] 221ff.

a. Grundprädikat ‚*Um*', **46a.**

b. Grundfunktor ‚*um*', **46b.**

Aufgabe 8. [Schw. III.] AS der Topologie auf Grund des Begriffs der konvergenten Punktfolge, nach HAUSDORFF [Grundzüge] 210, 233ff. Einziges Grundzeichen ‚*Lim*'. ‚*Lim* (x, f)': Der Punkt x ist Limes der konvergenten Punktfolge f; diese Folgen sind also $mem_2\,(Lim)$. Eine Punktfolge f ist eine Funktion, die den natürlichen Zahlen Punkte zuordnet. Eine Punktfolge wird daher bezeichnet durch einen Funktor, etwa ‚k'; ‚$k\,(n) = x$' heißt: „x ist der n-te Punkt der Folge k" (Zahlvariable ‚n', Gegenstandsvariable ‚x'; zweisortige Sprache, s. **21c**).

Aufgabe 9. [Schw. III.] AS der Metrik (in der Punktmengenlehre), nach HAUSDORFF [Grundzüge] 211f., 290ff. Einziges Grundzeichen: ‚*ent*'. ‚$ent\,(x, y) = r$' (reelle Zahlvariable ‚r') heißt: „Die Entfernung zwischen den Punkten x und y ist r" (zweisortige Sprache, s. Aufgabe 8).

Aufgabe 10. [Schw. III.] Definitionen für Begriffe der kombinatorischen Topologie (z. B. im Anschluß an L. VIETORIS, Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume ..., Math. Ann. 97, 454ff., 1927. Vgl. ferner: O. VEBLEN, Analysis Situs, Cambridge Colloquium, 1916). Einziges Grundzeichen: ‚*Vb*'; ‚$Vb\,(x, y)$' heißt: „Die Punkte x und y sind verbunden". *Vb* ist reflexiv und symmetrisch. ‚$Si\,(F)$' heiße „F ist ein Simplex"; definiert durch ‚$(V_2 \text{ in } F) \subset Vb$'. ‚$Si\,.\,5$' bezeichnet die Klasse der 5-dimensionalen Simplices. ‚$Seite\,(F, G)$': „F ist eine Seite von G"; definiert durch ‚$Si\,(F)\,.\,Si\,(G)\,.\,(F \subset G)$'. Die Klasse der Komplexe ist definiert durch ‚$sub_1(Si)\,.\,ClsInduct$'. Weiter zu definieren: ‚Rand eines Simplexes', ‚Rand eines Komplexes', ‚Zykel', ‚Zusammenhangszahl' usw.

Aufgabe 11. [Schw. III.] AS der projektiven Geometrie, mit Geraden als Relationen (im Anschluß an RUSSELL [Principles] 383ff., 430f.). Einziges Grundzeichen: ‚*Lin*'; es bezeichnet die Klasse der Geraden; jede Gerade ist eine Relation zwischen Punkten. Wenn R ein Element von *Lin* ist (‚$Lin\,(R)$'), so ist R eine Gerade und ‚Rxy' besagt: „x und y sind zwei Punkte auf der Geraden R". Die Klasse *Pu* der Punkte kann dann durch ‚$sm_1\,(mem``Lin)$' definiert werden.

Aufgabe 12. [Schw. II.] AS der projektiven Geometrie, ohne die unendlich fernen Punkte, also mit offenen Geraden (von RUSSELL deskriptive Geometrie genannt). (Im Anschluß an VEBLEN, A system of axioms for geometry, Trans. Am. Math. Soc., 5, 343—384, 1904; vgl. Darstellung bei COUTURAT [Prinzipien] 178ff.) Einziges Grundzeichen: ‚*Zw*'; ‚$Zw\,(x, y, z)$' heißt: „Der Punkt y liegt zwischen den Punkten x und z".

Aufgabe 13. [Schw. II.] AS der projektiven Geometrie, ohne die unendlich fernen Punkte. (Nach RUSSELL [Principles] 395ff., auf Grund des Systems von VAILATI, Sui principii fondamentali della geometria della retta, Riv. Mat. **2**, 71—75, 1892; vgl. auch COUTURAT [Prinzipien] 186.) Einziges Grundzeichen: ‚*Lin*'. Wenn *R* ein Element von *Lin* ist, so ist *R* eine Reihe, die die Punkte auf einer Geraden ordnet.

Aufgabe 14. [Schw. III.] AS der projektiven Geometrie, mit geschlossenen Geraden, durch Erweiterung des Systems von Aufgabe 12. Zunächst wird die Klasse *Bl* der Strahlenbündel definiert: Ein Strahlenbündel ist eine Klasse von Geraden, die entweder alle durch einen Punkt gehen oder untereinander parallel sind. Diese Strahlenbündel bilden dann die Elemente einer vollständigen projektiven Geometrie. Die Methode ist beschrieben in: RUSSELL [Principles] 400ff.

Aufgabe 15. [Schw. III.] Ebenso Erweiterung des Systems von Aufgabe 13.

Aufgabe 16. [Schw. III.] AS der metrischen Geometrie auf Grund des Begriffes der Bewegung. (Im Anschluß an PIERI, Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo: Monografia del punto e del moto, Mem. Acc. Torino, 1899; PIERI, Sur la géometrie envisagée comme un système purement logique, Bibl. Congrès Int. Philos., Paris 1900, Bd. III, 367—404; vgl. auch die Darstellung bei COUTURAT [Prinzipien] 204ff.) Einziges Grundzeichen: ‚*Bew*'. Wenn *R* ein Element von *Bew* ist, so ist *R* eine Bewegung, d. h. eine eineindeutige Relation zwischen Punkten.

Aufgabe 17. [Schw. III.] AS der metrischen Geometrie auf Grund des Begriffes der Teilkugel. (Nach E. V. HUNTINGTON, A set of postulates for abstract geometry, Math. Ann. **73**, 522—559, 1913.) Einziges Grundzeichen: ‚*T*'; es bezeichnet die (transitive, irreflexive) Relation zwischen zwei Kugeln derart, daß die erste ganz innerhalb der zweiten liegt. Die Klasse *Ku* der Kugeln wird definiert als Klasse der Glieder von *T*. — Drei verschiedene Arten:

a. Die Kugeln als Punktklassen. Die Klasse *Pu* der Punkte wird definiert durch ‚sm_1 (*Ku*)'. Man definiert: *y* liegt zwischen *x* und *z*, wenn *y* zu jeder Kugel gehört, zu der *x* und *z* gehören. Damit ist der Grundbegriff des Systems von Aufgabe 12 erreicht; daher können jetzt weitere projektive Begriffe wie dort definiert und die entsprechenden Axiome formuliert werden. Weiter werden folgende Begriffe definiert: Sehne, Oberfläche, Mittelpunkt, Durchmesser einer Kugel; Kongruenz für Strecken mit einem gemeinsamen Endpunkt, für parallele Strecken, für Strecken im allgemeinen. Damit sind die metrischen Begriffe erreicht.

b. Die Kugeln als Individuen, mit Punktkugeln. Die Punktkugeln sind diejenigen, die keine Teilkugeln besitzen. Fortsetzung analog zu Form (a). (Dies ist die Systemform von HUNTINGTON.)

c. Die Kugeln als Individuen, ohne Punktkugeln. Die Punkte werden definiert als gewisse unendliche Folgen ineinanderliegender Kugeln (vgl. **39 b**, Bemerkung zu Sprachform I B). Fortsetzung analog zu Form (a).

Aufgabe 18. [Schw. III.] AS der metrischen Geometrie auf Grund des Begriffes des Vektors. (S. Darstellung bei COUTURAT [Prinzipien] 194ff., auf Grund des Systems von PEANO, Analisi della teoria dei vettori, Atti Accademia Torino, 1898; vgl. auch RUSSELL [Principles] 432ff.). — Zwei Formen:

a. Mit einem Prädikat als einzigem Grundzeichen: ‚*Prd*'. ‚*Prd* (r, H, K)' besagt: „(Die reelle Zahl) r ist das innere Produkt der Vektoren H und K". Die Klasse *Ve* der Vektoren wird definiert durch ‚mem_2 (*Prd*)'. Ein Vektor ist hierbei eine eineindeutige Relation zwischen Punkten. Die Klasse *Pu* der Punkte wird definiert durch ‚sm_1 (*mem*" *Ve*)'.

b. Mit einem Funktor als einzigem Grundzeichen: ‚*prd*'. ‚*prd* (k_1, k_2)' gehört zum Typus der reellen Zahlausdrücke; wenn k_1 und k_2 Vektoren sind, so bezeichnet es deren inneres Produkt. Die Klasse *Ve* der Vektoren wird definiert als Klasse derjenigen Funktionen als Argumente für ‚*prd*', für die der Wert eine reelle Zahl ist. Die Vektoren werden hier durch Funktoren bezeichnet; ist k ein Vektor, so besagt ‚$k(x) = y$', daß der Vektor k vom Punkt x zum Punkt y führt.

Aufgabe 19. [Schw. III.] AS der metrischen Geometrie nach HILBERT, Grundlagen der Geometrie. Sieben Grundbegriffe: die drei Klassen der Punkte, der Geraden, der Ebenen, die vier Relationen der Inzidenz („liegt auf"), des Zwischen, der Streckenkongruenz, der Winkelkongruenz. Verschiedene Fassungen sind möglich; vgl. z. B. O. HELMER (s. 47).

Aufgabe 20. [Schw. III.] AS der zweidimensionalen, CLIFFORDschen Geometrie nach RUSSELL [Principles] 434ff.; vgl. KILLING, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, Bd. I, 1893, p. 271ff.). Gemeint ist die Geometrie des der CLIFFORDschen Fläche analogen Raumes, der überall die Krümmung 0 und doch ein endliches Volumen hat. Zwei Grundzeichen: ‚*Dir*' und ‚*Kl*'. ‚*Dir* (H)' besagt: „H ist eine Richtung"; die Richtungen sind symmetrische, irreflexive Relationen zwischen Punkten. ‚*Kl* (H, K)' besagt: „Der Punktabstand H ist kleiner als der Punktabstand K". Ein Punktabstand ist eine symmetrische Relation zwischen Punkten. Ist R eine Richtung, so ist die Klasse, bestehend aus x und den Gliedern, zu denen x in der Relation R steht, eine Gerade durch x.

55c. Physik

Aufgabe 21. [Schw. IV.] AS der Raum-Zeit-Topologie. Durchführung des Systems von **50**, Grundzeichen ‚W'.

Aufgabe 22. [Schw. IV.] AS der Ereignistheorie, nach WHITEHEADS Methode der extensiven Abstraktion (dargestellt in: The concept

of nature, 1920, S. 74ff.; und ausführlicher in: An enquiry concerning the principles of natural knowledge, 1919, S. 101ff.). Zwei Stufen des Aufbaues:

a. Topologie. Einziges Grundzeichen ‚*P*'; ‚*Pxy*' heißt: „Das Ereignis *x* ist ein Teil des Ereignisses *y*". Die Ereignisse sind also die Glieder von *P*. Beim Aufbau unterscheide man zwischen den abstraktiven Reihen und den abstraktiven Klassen, den Feldern jener Reihen. Die abstraktiven Reihen stellen die Punktereignisse dar (vgl. **39b**, Bemerkung zu Sprachform I B). Durch diese Reihen können nach WHITEHEAD alle räumlichen und zeitlichen Begriffe ausgedrückt werden.

b. Metrik. Zweites Grundzeichen ‚*Cogr*' für Kogredienz.

55d. Biologie

Aufgabe 28. [Schw. III.] Fortsetzung des in **52** und **53** dargestellten AS, auf Grund von WOODGER [Biologie].

Aufgabe 29. [Schw. II.] AS der biologischen Verwandtschaftsbegriffe, ohne Berücksichtigung der Zeitverhältnisse (ähnlich wie in **54a**, aber mit andern Grundbegriffen). Grundzeichen: ‚*So*', ‚*To*' für Sohn und Tochter.

Aufgabe 30. [Schw. IV.] Definitionen der biologischen Verwandtschaftsbegriffe, mit Berücksichtigung der Zeitverhältnisse, auf Grund des Systems von **53**.

Aufgabe 31. [Schw. III.] AS der biologischen Verwandtschaftsbegriffe, mit Berücksichtigung der Zeitverhältnisse. Schichten von gewissen Dingen (nämlich menschlichen Organismen, Spermatozoen, Eiern, befruchteten Eiern und Embryonen) werden als Individuen genommen, gemäß der in **39b** dargestellten Sprachform I B. Drei Grundzeichen: ‚*Zg*' (Zeitrelation), ‚*P*' (Teilrelation) und ‚*Wl*' (weiblich), bezogen auf Schichten der genannten Arten (derart, daß sowohl ein Spermatozoon als auch ein Ei als genidentisch angesehen wird mit dem Embryo und der Person, die sich aus ihrer Vereinigung entwickeln). Unter Berücksichtigung der Tatsachen, daß das Spermatozoon zunächst Teil des Vaters ist und später zu einem Teil des befruchteten Eies und damit der Mutter wird, und daß das unbefruchtete Ei, das befruchtete Ei und der Embryo Teile der Mutter sind, können die Begriffe Vater und Mutter definiert werden, und daraus die übrigen biologischen Verwandtschaftsbegriffe (s. **54a**).

Aufgabe 32. [Schw. III.] AS der juristischen Verwandtschaftsbegriffe (vgl. **54b**), aber mit Berücksichtigung der Zeitverhältnisse. Ergänzung des Systems von Aufgabe 31 durch Hinzufügung von zwei weiteren Grundzeichen ‚*LGa*' und ‚*LKi*' für die juristischen Begriffe der legalen Ehe und der legalen Kindschaft; im Unterschied zu **54b** sind dies hier nicht Relationen zwischen Personen, sondern zwischen Personenschichten. ‚*LGa* (*x*, *y*)' heißt hier „*x* ist eine Schicht einer männlichen

Person und y eine gleichzeitige Schicht einer weiblichen Person, und x und y sind legal verheiratet". ‚LKi (x, y)' heißt: „x ist ein legales Kind von y", wobei x und y gleichzeitige Schichten zweier Personen sind. Es können dann folgende Begriffe definiert werden: legal geborenes Kind, illegales Kind, legalisiertes Kind, Adoptivkind. In dieser Weise können hier zeitabhängige Begriffe definiert und Axiome für sie formuliert werden, die in dem System von **54b** nicht ausdrückbar sind (vgl. dort Bemerkungen am Schluß).

56. Literaturverzeichnis

Die Abkürzungen in eckigen Klammern dienen zur Bezeichnung der Veröffentlichungen in Zitaten. Hinweise auf [P. M.] (s. WHITEHEAD) und einige meiner Bücher werden zuweilen ohne Autornamen gegeben.

ACKERMANN, s. HILBERT.
BACHMANN, s. CARNAP.
BECKER, O.: [Logistik], Einführung in die Logistik. Meisenheim 1951.
BEHMANN, H.: [Math.], Mathematik und Logik. Leipzig und Berlin 1927.
BERNAYS, s. HILBERT.
BETH, E. W.: [Logik], Symbolische Logik und Grundlegung der exakten Wissenschaften, Bibliographische Einführungen in das Studium der Philosophie, Heft 3, Bern 1948.
BOCHENSKI, I. M.: [Logica], Nove lezioni di logica simbolica, Rom 1938.
— [Logique], Précis de logique mathématique. Bussum, Holland, 1949.
CARNAP, R.: [Aufbau], Der logische Aufbau der Welt. Berlin 1928.
— [Abriß], Abriß der Logistik. Wien 1929.
— [Neue Logik], Die alte und die neue Logik. Erkenntnis **1**, 1930.
— [Syntax], Logische Syntax der Sprache. Wien 1934.
— [Syntax E], Logical Syntax of Language. London and New York 1937. Dieses Buch enthält auch die Übersetzungen von [Antinomien] und [Gültigkeitskriterium].
— [Antinomien], Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik. Monatsh. Math. Phys. **41**, 1934.
— [Gültigkeitskriterium], Ein Gültigkeitskriterium für die Sätze der klassischen Mathematik. Monatsh. Math. Phys. **42**, 1935.
— [Foundations], Foundations of logic and mathematics. Encyclopedia of unified science, Vol. I, No. 3. Chicago 1939.
— [Semantics], Introduction to semantics. Cambridge, Mass. 1942.
— [Formalization], Formalization of logic. Cambridge, Mass. 1943.
— [Meaning], Meaning and necessity. A study in semantics and modal logic. Chicago 1947.
— [Probability], Logical foundations of probability. Chicago 1950.
— und F. BACHMANN: [Extrem.], Über Extremalaxiome. Erkenntnis **6**, 1936.
CHURCH, A.: [Bibliogr.], A bibliography of symbolic logic. Journal of Symbolic Logic **1**, 1936, und **3**, 1938. Auch gesondert erschienen.
— [Introduction], Introduction to mathematical logic. Part I. Princeton, N. J. 1944. (Eine erweiterte Ausgabe ist im Druck.)
— [Brief bibliography], Brief bibliography of formal logic. Proc. Amer. Acad. of Arts and Sciences **80**, 157—172, 1952.
COOLEY, J. C.: [Logic], A primer of formal logic. New York 1942.
COUTURAT, L.: [Prinzipien], Die philosophischen Prinzipien der Mathematik. (Orig. 1906.) Leipzig 1908.
DOPP, J.: [Logique], Leçons de logique formelle. (Band I: Logique ancienne; II und III: Logique moderne.) Louvain 1950.
FEYS, R.: [Logistique], Principes de logistique. Louvain 1939.
— [Logistiek], Logistiek, geformaliseerde logica. Band I. Antwerpen und Nijmegen 1944.

FITCH, F. B.: [Logic], Symbolic logic. New York 1952.
FRAENKEL, A.: [Grundlegung], Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre, Leipzig und Berlin 1927.
— [Einleitung], Einleitung in die Mengenlehre. Berlin (1919), 3. Aufl. 1928.
FREGE, G.: [Begriffsschrift], Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgemachte Formelsprache des reinen Denkens. Halle 1879.
— [Grundlagen], Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau 1884; Neudruck 1934.
— [Grundgesetze], Grundgesetze der Arithmetik. Jena I 1893; II 1903.
GOODMAN, N.: [Structure], The structure of appearance. Cambridge, Mass. 1951.
HAUSDORFF, F.: [Grundzüge], Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig 1914 (2. Aufl., gekürzt, „Mengenlehre", 1927).
HERMES, H. und H. SCHOLZ: [Logik], Mathematische Logik. (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band I, 1, 2. Aufl., Heft 1, Teil I.) Leipzig 1952.
HILBERT, D. und W. ACKERMANN: [Logik], Grundzüge der theoretischen Logik. Berlin (1928), 3. Aufl. 1949.
— und P. BERNAYS: [Grundlagen], Grundlagen der Mathematik. Berlin I 1934, II 1939. Neudruck, Ann Arbor, Mich. 1944.
JØRGENSEN, J.: [Treatise], A treatise of formal logic. Its evolution and main branches with its relation to mathematics and philosophy. 3 Bände. Kopenhagen 1931.
KLEENE, ST. C.: [Metamathematics], Introduction to metamathematics. New York 1952.
KÖNIG, J.: [Logik], Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre. Leipzig 1914.
LEWIS, C. I.: [Survey], A survey of symbolic logic. Berkeley 1918.
— und C. H. LANGFORD: [Logic], Symbolic logic. New York und London 1932; Neudruck New York 1951.
MARC-WOGAU, K.: [Logik], Modern logik. Elementär lärobok. Stockholm 1950.
MENGER, K.: [Logik], Die neue Logik. In: Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften. Wien 1933.
MORRIS, CH. W.: [Foundations], Foundations of the theory of signs. Encyclopedia of unified science, Vol. I, No. 2, Chicago 1938.
— [Signs], Signs, language and behavior. New York 1946.
MOSTOWSKI, A.: [Logika], Logika matematyczna. Warschau und Breslau 1948.
PEANO, G.: [Notations], Notations de logique mathématique. Torino 1894.
— [Formulaire], Formulaire de mathématiques. Torino 1895—1908.
QUINE, W. V. O.: [Logistic], A system of logistic. Cambridge, Mass., 1934.
— [Types], On the theory of types. Journal of Symb. Logic 3, 1938.
— [Math. Logic], Mathematical logic. New York 1940, 3. Aufl., Cambridge, Mass., 1951.
— [Lógica], O sentido da nova lógica. São Paulo, Brasilien, 1944.
— [Methods], Methods of logic. New York 1950.
RAMSEY, F. P.: [Foundations], The foundations of mathematics, and other logical essays. London und New York 1931; Neudruck 1950.
REICHENBACH, H.: [Logic], Elements of symbolic logic. New York 1947.
ROSENBLOOM, P. C.: [Logic], The elements of mathematical logic. New York 1950.
ROSSER, J. B.: [Logic], Logic for mathematicians. New York 1953.
ROTH, E.: [Axiomat.], Axiomatische Untersuchungen zur projektiven, affinen und metrischen Geometrie. Leipzig 1937.

RUSSELL, B.: [Principles], The principles of mathematics (Cambridge 1903), 2. Aufl., Text unverändert, mit neuer Einleitung, London 1937, New York 1938.
— [P. M.], Principia mathematica, s. WHITEHEAD.
— [Math. Logik], Einführung in die mathematische Logik. (Übersetzung der Einleitungen von [P. M.] I[1] und I[2].) München 1932.
— [Außenwelt], Unser Wissen von der Außenwelt. (Orig. 1914.) Leipzig 1926.
— [Einführung], Einführung in die mathematische Philosophie. (Orig. 1919.) München 1923.
SCHOLZ, H.: [Geschichte], Geschichte der Logik. Berlin 1931.
— [Vorlesungen], Vorlesungen über Grundzüge der mathematischen Logik. 2 Bände, Münster i. W. (1949), 2. Aufl. 1950—1951.
SCHRÖDER, E.: [Vorlesungen], Vorlesungen über die Algebra der Logik. I—III, Leipzig 1890—1905.
TARSKI, A.: [Wahrheitsbegriff], Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. Studia Philosophica 1, 1936 (Sonderdruck 1935).
— [Logik], Einführung in die mathematische Logik. Wien 1937.
WAISMANN, F.: [Math. Denken], Einführung in das mathematische Denken. Wien 1936.
WHITEHEAD, A. N. und B. RUSSELL: [P. M.], Principia mathematica. Cambridge, 1. Aufl.: I 1910, II 1912, III 1913; 2. Aufl.: I 1925 (Text unverändert, neue Einleitung und Anhänge hinzugefügt), II, III 1927 (unverändert); Neudruck 1950.
WITTGENSTEIN, L.: [Tractatus], Tractatus logico-philosophicus. (Deutsch und englisch.) Mit Vorwort von RUSSELL. London 1922. (Ursprünglich erschienen unter dem Titel „Logisch-philosophische Abhandlung", Ann. d. Naturphilosophie 14, 1921.)
WOODGER, J.: [Biology], The axiomatic method in biology. Cambridge 1937.
— [Theory construction], The technique of theory construction. Encyclopedia of unified science, Vol. II, No. 5. Chicago 1939.

57. Literaturhinweise

Zur Geschichte der symbolischen Logik: LEWIS [Survey], JØRGENSEN [Treatise]. Geschichte der Entwicklung des formalen Charakters der Logik, die zur symbolischen Logik geführt hat: SCHOLZ [Geschichte].

Bibliographie: LEWIS [Survey] (bis 1917), FRAENKEL [Einleitung] (bis 1928, besonders in bezug auf logische Grundlagen der Mathematik), CHURCH [Bibliogr.] (vollständige Bibliographie, von vor LEIBNIZ bis 1935, mit sehr brauchbaren Sachregistern; wird laufend weitergeführt in: Journ. Symb. Logic), CHURCH [Brief bibliography], BETH [Logik]. Über die Jahre 1939—1948 s. die Beiträge von E. BETH, R. FEYS und F. GONSETH in: Philosophie, Chronique des années ..., herausgegeben von R. BAYER, Band XI und XIII (Actual. Scient., No. 1089 und 1105). Paris 1950.

Ältere Systeme, die im wesentlichen nur noch historisches Interesse besitzen: A. DE MORGAN, Formal logic, London 1847, Neudruck 1926. G. BOOLE, An investigation of the laws of thought, London 1854, Neudruck New York 1951. W. S. JEVONS, Pure logic, London 1864, Neudruck 1890.

Ältere Schriften, die zwar im wesentlichen durch die neuere Entwicklung überholt sind, die aber doch Überlegungen enthalten, die auch noch für die Gegenwart wertvoll sind: FREGE [Begriffsschrift], [Grundlagen], [Grundgesetze]; SCHRÖDER [Vorlesungen]; PEANO [Notations], [Formulaire], CHARLES S. PEIRCE, Collected Papers, Cambridge, Mass., 1931ff. (besonders Band II—IV); WHITEHEAD, A treatise on universal algebra, Cambridge, England, 1898.

Moderne symbolische Logik. Hauptwerk: WHITEHEAD und RUSSELL [P. M.]. Die meisten neueren Systeme lehnen sich in ihrer Struktur mehr

oder weniger an das System der [P. M.] an, auch wenn die angewendete Symbolik oft verschieden ist. In den folgenden Punkten weichen jedoch die meisten gegenwärtigen Systeme von [P. M.] ab: das Reduzibilitätsaxiom wird aufgegeben und daraufhin die verzweigte Typeneinteilung durch die einfache ersetzt (vgl. **21c** und [Syntax] § 27); man stellt heute höhere Anforderungen in bezug auf vollständige Angabe der angewendeten Deduktionsregeln und streng formale Formulierung dieser Regeln. — Systeme mit ähnlicher Struktur wie [P. M.]: HILBERT [Logik] (mit etwas abweichender Symbolik); BEHMANN [Math.] (mit anderer Symbolik); das vorliegende Buch (die Symbolik ist in den Grundzügen die gleiche). — Neuere Systeme mit stärker abweichender Struktur: LEWIS [Survey] und [Logic] (mit intensionalen, d. h. nicht-extensionalen Verknüpfungen, vgl. **29c**); HEYTING, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, Ber. Akad. Berlin, **1930** (ohne Grundsatz vom ausgeschlossenen Dritten); A. CHURCH [Introduction]. — Logische Systeme, in denen die Typenunterscheidung beseitigt oder wesentlich abgeschwächt ist (vgl. **21c**): J. v. NEUMANN, Zur HILBERTschen Beweistheorie, Math. ZS. **26**, 1927; QUINE, New foundations for math. logic, Am. Math. Monthly **44**, 1937, [Types], [Math. logic]; ACKERMANN, Mengentheor. Begründung der Logik, Math. Ann. **115**, 1937.

L e h r b ü c h e r der symbolischen Logik. In D e u t s c h: HILBERT [Logik] (leicht verständliche Einführung); TARSKI [Logik] (wenig Symbolik, viele mathematische Beispiele); BEHMANN [Math.] (nicht-übliche Symbolik); BECKER [Logistik]. In E n g l i s c h: COOLEY [Logic]; LEWIS und LANGFORD [Logic]; CHURCH [Introduction]; REICHENBACH [Logic]; QUINE [Methods]; FITCH [Logic]; ROSSER [Logic]. In F r a n z ö s i s c h: BOCHENSKI [Logique]; FEYS [Logistique]; DOPP [Logique]. In I t a l i e n i s c h: BOCHENSKI [Logica]. In H o l l ä n d i s c h: FEYS [Logistiek]. In P o r t u g i e s i s c h: QUINE [Lógica]. In P o l n i s c h: MOSTOWSKI [Logika]. In S c h w e d i s c h: MARC-WOGAU [Logik].

F ü r f o r t g e s c h r i t t e n e S t u d i e n, nach dem Lesen dieses Buches, kommen unter anderem zunächst die folgenden Bücher in Betracht: [P. M.]; RUSSELL [Principles] und [Einführung]; ROSSER [Logic]; QUINE [Math. Logic] und [Methods]; KLEENE [Metamathematics]; HERMES und SCHOLZ [Logik]; SCHOLZ [Vorlesungen]; CARNAP [Syntax] und [Semantics].

A n w e n d u n g e n d e r s y m b o l i s c h e n L o g i k außerhalb des Gebietes der deduktiven Logik und Mathematik: WOODGER [Theory construction] und [Biology] (s. **52** und **53**); GOODMAN [Structure]; CLARK L. HULL, Mathematico-deductive theory of rote learning, 1940; CARNAP [Aufbau], [Probability]. Allgemeine Diskussion über Möglichkeiten der Anwendung: E. C. BERKELEY, Conditions affecting the application of symbolic logic, Journal Symb. Logic **7**, 1942. Für weitere Hinweise s. QUINE [Math. Logic] 8.

Namen- und Sachverzeichnis

Die Ziffern beziehen sich auf die Seiten des Buches. Die wichtigsten Stellen sind durch Fettdruck hervorgehoben.

ableitbar 82
Ableitung **31**, 46, 48, 82
absoluter Existenzsatz 53
abzählbar 128
ACKERMANN, W. 202, 204
affine Geometrie 167
allgemeine Implikation 34.
allgemeingültig 42
Allklasse 109
Alloperator **32**, 61
Allsatz 32
Allwort 35
analytisch 16
Anfangsglied 66, 111
Anführungszeichen 5
Antinomie 74f.
Anzahl der Individuen 80
Äquivalenz 9
Äquivalenzklasse 118f.
Äquivalenzrelation 118
Argumentausdruck 5, 73
Argumentstelle 5
Arithmetik 3, 99, 196
Artikel 35f.
AS **146**
Assoziation 30
asymmetrisch 105
Atomformel, Atomsatz 24.
Attribut 5
Aufzählungsklasse 111f.
Auswahlprinzip 78f., 153
Auswertung 16, **41**, **86**
Axiom 147
Axiomensystem 146ff.

BACHMANN, F. 69, 154, 201
BAYER, R. 203
BECKER, O. 201, 204
Begriffsinhalt 38
Begriffsumfang 38
BEHMANN, H. 201, 204
Beispielzeichen 6

Bereich 4
BERKELEY, E. C. 204
BERNAYS, P. 3, 75, 152, 202
beschränkter Operator 140
BETH, E. W. 201, 203
Beweis **46**, **48**, **81**
beweisbar 82
bewertbares Zeichen 16, 41, 86
Bewertung 14, 16, 41, **86**
Bezeichnungsregel 88
Biologie 187, 200
BOCHENSKI, I. M. 201, 204
BOOLE, G. 203
BRUNER, F. G. 100
BURALI-FORTI 196

CANTORsche Stetigkeit 134, 173
CHURCH, A. 115, 201, 203, 204
CLIFFORD 199
COOLEY, J. C. 143, 158, 201, 204
COUTURAT, L. 196—199, 201

DE MORGAN, A. 56, 203
DEDEKINDsche Relation 133, 159
— Stetigkeit 134, 172, 187
Deduktion 20
Definiendum, Definiens 59
Definition **58**, 77
— durch Abstraktion 119
Designat 70, 88
deskriptiv 7, 15, 42, 85f.
Determination 181f.
Deutung 1, 85, **90**f., 148
dicht 133
Dimensionszahl **163**, 178
Ding 135, 183f.
Dingmoment 135
Dingsprache 135ff.
Disjunktion 7
Distribution 30, 31, **53**, 55, 56
DOPP, J. 201, 204
Dualität 29

Durchschnitt 96
Durchschnittsklasse 110

Eigenschaft 4, 38
eineindeutig 68, 108
Einerklasse 111f.
einmehrdeutig 67
einsetzbar 22
Einsetzung 22, 24, **43**
Einsetzungsinstanz 23, 44
EINSTEIN, A. 169
einstellig 5
Einzigkeitsbedingung 123ff.
Endglied 66, 110
endlich 130f.
entscheidbar 82
erblich 126
Ereignistheorie 199
erfüllbar 42
erfüllen 42, 88
Ersetzbarkeit 27, 57, 84
Erstglied 65
erweiterte Sprache 92
Existenzannahme 80
Existenzoperator **33**, 61
Existenzsatz 33
Existenzschluß 51
Explikation 2
Explizitprädikat 149
Extension **38**ff., 88, 89
extensional **39**, 78, 100
extensionale Sprache 100
Extensionalitätsthese 101

F-falsch 17
F-wahr 17
faktisch 17
Familie 128
Feld 65
FEYS, R. 201, 203, 204
Finitismus 141
FITCH, F. B. 202, 204
formal 71
Formalisierung 147
Formel 23
Formeleinsetzung 44
Formregel 76
FRAENKEL, A. 75, 80, 122, 150, **151**, 202, 203
Frakturzeichen 72
FREGE, G. 3, 119, **122**, **128**, 202, 203
frei **33**, 76
Funktion 39
Funktor 65
Funktorausdruck 74
Funktorvariable 66

ganze Zahl **141**ff.
gebunden **33**, 76
Gehalt 20
genidentisch 170f.
Geometrie 149, 160, **164**, 197
geschlossen 23, **33**
Gesetz 34, 175
Gleichzahligkeit 69
Gleichzeitigkeit 136, 175
Glied 65
GÖDEL, K. 75, 92, 100, 149, 152
GONSETH, F. 203
GOODMAN, N. 202, 204
Grad 5
Größe 144, 196
Grundkalkül 147
Grundsatz 77ff.
Grundsatzschema 79
Grundsprache 149
Grundtypus 99
Grundzeichen 73, 147

HAUSDORFF, F. 122, **160**, 177, 197, 202
HELMER, O. 164, 199
HERMES, H. 202, 204
HEYTING, A. 204
Hierarchie 189
HILBERT, D. 3, 5, 83, 92, 100, 149, 150, 158, 164, 196, 199, 202, 204
homogen 74
HULL, C. L. 204
HUNTINGTON, E. V. 198

Identität **62**, 78, **97**f.
Implikation 8
Implikationsregel 80
Individualausdruck 39, 65
Individualbegriff 39
Individualkonstante 4
Individualvariable 32
Individualzeichen 23, 32
Individuenbereich 4, 33
Individuum 4
Induktionsprinzip **130**, **140**, 142, 157
induktive Kardinalzahl 130
— Klasse 130
inhomogen 74
Instanz 23
Intension 38, 88
Intervall 128
intransitiv 105
Iota-Operator 123
irreflexiv 106
isomorph 69

JEVONS, W. S. 203
JÖRGENSEN, J. 202, 203

K-Operator 139ff.
K-*Z*-System 169ff.
Kalkül 72, 90

Kardinalzahl **64**, 69, **121** f.
kategorisch 149
Kausalität 182f.
Kennzeichnung 123ff.
Kette 127
KILLING 199
Klammer 9, 33, 101, 114f.
Klasse von Sätzen 21
Klassenausdruck 115
Klassenkalkül 97
Klassenterminologie 96
KLEENE, S. C. 202, 204
Koinzidenz 170
kombinatorische Topologie 197
Kommutation 29
KÖNIG, J. 122, 202
Konjunktion 8
Konstante 15
Konstruktivismus 141
kontradiktorisch 17
Konverse 102
Koordinatensprache 138ff.
Korrelator 68

λ-Ausdruck 113
λ-Funktorausdruck 114
λ-Operator 77, 78, **112** ff.
λ-Regel 115
L-äquivalent 19
L-Begriff 15, 42, 88
L-determiniert 17
L-ersetzbar 27, 58
L-falsch 17
L-Implikation 18
L-indeterminiert 17
L-wahr 16
Lagerelation 181
LANGFORD, C. H. 202, 204
leer 95
leere Klasse 109
leerer Spielraum 16
LEIBNIZ 16
LEWIN, K. 170
LEWIS, C. I. 202, 203, 204
Logikkalkül 91
logische Formel 42
logischer Begriff 15
logisches Zeichen 7, 15, 85f.

MARC-WOGAU, K. 202, 204
Maßeinheit 145
Maßgröße 144, 196
materielle Äquivalenz 9
— Implikation 9
Matrix 104
Maximum 133
MEHLBERG, H. 169
mehreindeutig 67
Mehrheit von Arithmetiken 99
mehrsortig 75
Mengenlehre 75, 151, 196
MENGER, K. 3, 162f., 202
Metasprache 10, **70**
metrische Geometrie 168, 198f.
Minimalaxiom 154, 156
Minimum 133
MINKOWSKI 170, 175
Modalität 40, 100
Modell 148
modus ponens 26, 80
molekular 24
monomorph 149
MORRIS, C. W. 202
MOSTOWSKI, A. 202, 204

n-stellig 5
Nachbereich 65
nacheindeutig 67, 108
Nachkommenschaft 128
natürliche Zahl 138ff., 156
Negation 8.
Nennformel 44
NEUMANN, J. v. 75, 152, 196, 204
nicht-leer 95
nicht-logisches Zeichen 7
Normalform 83

Objektsprache 70
offen 23, **33**
Operand 32, 33
Operator 32
Ordinalzahl 133

Paarliste 104
PASCH 166
PEANO, G. 3, 199, 202, 203
PEANOS AS 149, **156**
PEIRCE, C. S. 203
Pfeilfigur 104
Physik 144, 169, 199
PIERI 198
Prädikat 4
Prädikatausdruck 65, 73
Prädikatvariable 37, 60f.
Prädikatverknüpfung 93
Pragmatik 70
Prämisse 31, 82
Primzahl 141
Progression 128f.
projektive Geometrie 164, 197f.
Proposition 38
Punktmengenlehre 160, 197

quantitativer Begriff 144
QUINE W. V. 75, 202, 204

RAMSEY, F. P. 75, 202
rationale Reihe 133

rationale Zahl **143**, 196
Raum-Zeit-Topologie 169, 199
Reduzibilitätsaxiom 75
reelle Zahl **143**f., **158**, 196
reflexive Kardinalzahl 131
— Klasse 131
— Relation 105
REICHENBACH, H. 169, 175, 202, 204
Reihe 106
rekursive Definition 141
Relation 4
relationale Kennzeichnung 125
Relationskette 126f.
Relationsprodukt 101
relativer Existenzsatz 53
Relativitätstheorie 169
ROBB 169
ROSENBLOOM, P. C. 202
ROSSER, J. B. 202, 204
ROTH, E. **164**, 202
RUSSELL, B. **3**, **74**f., 80, 115, 119, **122**, 128, 143, 150, 156, 169, 196—199, 203, 204
RUSSELLS Antinomie 74f.

Satz 33
Satzformel **23**, 76
Satzkalkül 78f.
Satzkonstante 6
Satzvariable 23
Satzzeichen 24
Schicht 135f., 185
Schlußregel 80
Schlußsatz 31
SCHNELL, K. 169
SCHOLZ, H. 119, 202, 203, 204
SCHRÖDER, E. 203
SCHWEITZER, H. 119
Semantik 71
semantisches System 71, **85**, 90
Semiotik 70
Signalkette 173
Sinn 13
Spezialisierung 51, 78f.
Spielraum 14, **16**, 42, 88
Sprache A 4
— B 70, 72
— C 92
Sprachformen I, II, III 136ff.
Sprachsystem 71
Stetigkeit 133f.
Struktur 69, **120**
strukturelle Eigenschaft 122
Stufe **60**, 74
Stufenerhöhung 61
Substitut 44
Summe 129, 141
Syllogismus 53
symbolische Logik 1ff.
Symbolisierung 147
symmetrisch 105
syntaktisches System 71, 90
Syntax 71
synthetisch 17

TARSKI, A. 100, **143**, 150, **158**, 203, 204
tautologisch 14, 25
Teilklasse 95, 110
Teilrelation 95, 136
Terminologie 3, 5
Theorem 147
Topologie 160, 169, 197
total-reflexiv 106
totaler Spielraum 14, 16
transfinite Stufe 99
transitiv 105
Transposition 29, 31
Typensystem **73**ff., 98f.

Umformungsregel 77
Umgebungsaxiom 160, 178
Umgebungssystem 162, 177
Umkehrung 102
Umschreibung 47
unendlich 130f.
Unendlichkeitsaxiom 80, 131f., 153
unentscheidbar 82
unerfüllbar 42
universelle Implikation 34
— Klasse 94, 109
universeller Satz 32

VAILATI 198
Variable 15, **22**, 145
VEBLEN, O. 197
Vereinigung 96
Vereinigungsklasse 110
Verkettung 101
Verknüpfungszeichen 7
Verschiebung 55, 56
Verwandtschaftsbegriff 191ff., 200
VIETORIS, L. 197
Vollausdruck 65
Vollformel 24
Vollsatz 5, 24
vollständig 149
Vorbereich 65
voreindeutig 67, 108
Vorfahrenrelation 127
Vorfahrenschaft 128
Vorgänger 129, 141

Wahrheit 10, 15, 88, **89**
Wahrheitsbedingung **13**, 89f.
Wahrheitsfunktion 27
Wahrheitstafel 10ff.
Wahrheitswert **10**, 38
WAISMANN, F. 122, 143, 196, 203

Weltlinie, Weltpunkt 170
Wendung 29, 31
wenn-Satz 8, 34
Wert 39, 86
— der Variablen 22
Wertbereich 88
Wertextension, Wertintension 39
WHITEHEAD, A. N. 3, 137, 199f., 203
widerlegbar 82
widerspruchsfrei, widerspruchsvoll 148
Wirkungsrelation 173, 180
WITTGENSTEIN, L. 122, 203
wohlgeordnet 133
WOODGER, J. 137, 150, 183, 187, 200, 203, 204

Zeitrelation 136, 170, 187
ZERMELO, E. 80
zusammenhängend 106
Zustandsgröße 181, 182
zweistellig 5
Zweitglied 65

Zeichen der symbolischen Sprache und der Metasprache

A 6
a 4
$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$ 72
aequ 118
As 106

$\mathfrak{B}$ 4
BOrd 133

ClsInduct 130
ClsRefl 131
Connex 106f.
Corr 68

Ded 133
dim 163
Dimhom 164
Ding 184

∃ 33

F 10
F 37
f 66
fam 128

Glz, Glzg 136
Gr 141

H 37
Her 126
Hier 189

I 98
in 111
init 111
int 128

Intr 106
Irr 106f.

J 98

K 139
Kl 141

Magn 181
max 133
mem 65

NO 133

P 4f.; Teil 136, 184
p 23
pr 110
prod 141
Prog 128f.

R 4f.
Refl 106f.
Reflex 106f.

$\mathfrak{S}$ 72
Sch 136, 185
Ser 106f.
SerDed 134
Sit 181
sm 110
Str, str 120
$Str_1Induct$ 130
Str_1Refl 131
Struct 122
sub 110
sum 129, 141
Sym 106

Trans 106

U 94
Un 67f., 108

V 109
$\mathfrak{v}$ 72
Vorg 129, 141

W 10

Z 136, 170
Zg 136, 184, 187

∨ 7
. ∼ ⊃ 8
$\equiv$ 9
= 62, 97
$\neq$ 63, 98
1_m, 2_m, ... 64
0, 1, 2, ... 65, 121
( ) 77
⊂ 95
| 101
R^2, ... R^0; R^{-1} 102
Λ 109
R“*Q*, *k*“*Q* 110
$\{a\}$, $\{a,b\}$, $\{a;b\}$ usw. 111f.
R(*a*,—) usw. 117
℩ 123
R‘b 125
$R^{\geqq 0}$, $R^{>0}$ 127
$\aleph_0$ 128f.
Ω 133
η 133
ϑ 134
a' 139

Manzsche Buchdruckerei, Wien IX

Der Wiener Kreis. Der Ursprung des Neopositivismus. Ein Kapitel der jüngsten Philosophiegeschichte. Von **Victor Kraft,** o. Professor der Philosophie an der Universität Wien. VI, 179 Seiten. 1950.
Steif geheftet S 63.—, DM 10.—, $ 2.50, sfr. 10.80

„... Das anregend geschriebene, solide und — vor allem, was die verhältnismäßig kurzen, der Kritik gewidmeten Ausführungen betrifft — inhaltlich beachtenswerte Werk, das (neben reichen Literaturangaben) eine vorzügliche enzyklopädische Einführung in den Gegenstand bietet, zerfällt in zwei Hauptteile, die die Geschichte und die Ergebnisse der Arbeit des ‚Wiener' (jetzt amerikanischen) Kreises darstellen..." *Philosophischer Literaturanzeiger*

Einführung in die Philosophie. Philosophie, Weltanschauung, Wissenschaft. Von **Victor Kraft,** o. Professor der Philosophie an der Universität Wien. VI, 161 Seiten. 1950.
Steif geheftet S 38.—, DM 8.40, $ 2.—, sfr. 9.—

„... Es gibt zwar einerseits eine große Zahl (mehr oder weniger veralteter) Einführungen, unter ihnen aber nur ganz wenige, die ihren Zweck wirklich erfüllen. Besonders der Wissenschaftscharakter der Philosophie ist es, der in den vorhandenen Einführungswerken nicht hinreichend klargestellt wird. Diese Lücke in der philosophischen Literatur füllt das vorliegende Buch im besten Sinne des Wortes aus. Man darf sagen, daß es sich von den sonst üblichen Einführungen in dreifacher Hinsicht positiv unterscheidet: 1. dadurch, daß es zeigt, welche Grundlehren in der Philosophie als wissenschaftlich gerechtfertigt anzusehen sind und welche nicht, 2. dadurch, daß der philosophische Weltbegriff klar gefaßt und 3. dadurch, daß eine allgemeine Wertlehre gegeben wird..."
Philosophischer Literaturanzeiger

Mathematik, Logik und Erfahrung. Von Univ.-Prof. Dr. **Victor Kraft,** Wien. VII, 129 Seiten. 1947.
Steif geheftet S 48.—, DM 8.—, $ 1.90, sfr. 8.20

Der dem Wiener Kreis angehörende Verfasser untersucht die Anwendbarkeit von Mathematik und Logik in der Erfahrungswelt, wobei er eindeutig gegen den „Konventionalismus" Stellung nimmt. „... Es kommt gar nicht darauf an, welche Stellung der Leser zu den Ansichten des Autors nimmt. Das Buch ist sehr interessant, flüssig geschrieben und leicht zu lesen."
Österreichisches Ingenieur-Archiv

Die Grundlagen einer wissenschaftlichen Wertlehre. Von **Victor Kraft,** o. Professor der Philosophie an der Universität Wien. Zweite, neubearbeitete Auflage. VI, 264 Seiten. 1951.
Steif geheftet S 96.—, DM 16.—, $ 3.80, sfr. 16.40

Die Schrift ist besonders deswegen von allgemeinem Interesse, weil der Verfasser seine streng wissenschaftliche Denkweise auf einen Philosophiezweig anwendet, der bisher noch kaum in dieser Form untersucht wurde, nämlich auf die Wertlehre. Er zeigt, was durch logische Analyse und empirische Feststellungen ohne Dogma und Metaphysik auf dem Wertgebiet erkannt werden kann und kommt dabei zu dem Schluß, daß man auch bei noch so entschiedener Ablehnung eines unbegründbaren Absolutismus der Werturteile noch nicht dem schrankenlosen Subjektivismus mancher radikaler Empiristen preisgegeben ist.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung